TEOREMA DI ROLLE

Sia $y = f(x)$ una funzione continua in un intervallo chiuso $[a, b]$ e derivabile nell'intervallo aperto $]a, b[$, se la funzione assume valori eguali negli estremi a e b dell'intervallo, allora esiste almeno un punto c, interno all'intervallo, in cui la derivata della funzione è nulla.

Hp
$f(x)$ continua in $[a, b]$
$f(x)$ derivabile in $]a, b[$
$f(a) = f(b)$

Th
$\exists\, c \in\,]a, b[\, :\, f'(c) = 0$

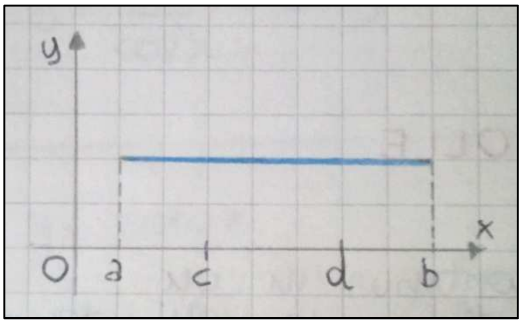
Dimostrazione
Per il teorema di Weierstrass, se la funzione $y = f(x)$ è continua nell'intervallo $[a, b]$ essa ammette un minimo assoluto e un massimo assoluto. Detti c e d, con $c, d \in [a, b]$, i due punti in cui, per esempio, è $f(c) = m$ e $f(d) = M$, si avrà $\forall x \in [a, b]$

$$m = f(c) \leq f(x) \leq f(d) = M$$

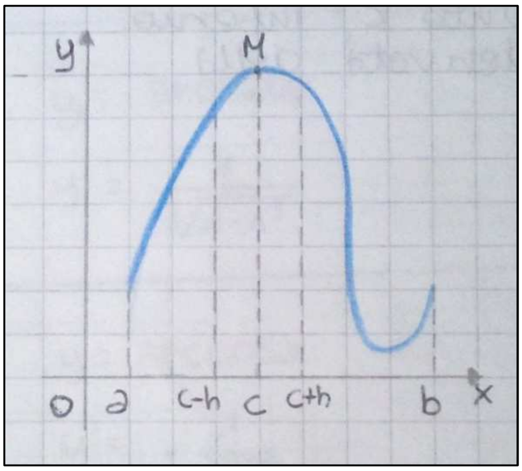
Possono presentarsi due casi.

I CASO: $\boldsymbol{m = M}$

Risulta che $m = f(c) = f(x) = f(d) = M$, risulta cioè che $f(x)$ è costante in tutto l'intervallo $[a, b]$ e pertanto la sua derivata sarà nulla $\forall x \in [a, b]$ e il teorema è perciò dimostrato.



II CASO: $\boldsymbol{m} < M$



La funzione non è costante in $[a, b]$ e, poiché $f(a) = f(b)$, almeno uno dei due punti m e M cade nell'intervallo $[a, b]$.
Supponiamo che $\exists c : f(c) = M$. Prendiamo in considerazione un punto di ascissa $(c + h)$. per cui:

$$f(c + h) - f(c) \leq 0$$

Consideriamo ora il punto di ascissa $(c - h)$:

$$f(c - h) - f(c) \leq 0$$

Dividiamo la prima relazione per h:

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$$

Dividiamo la seconda relazione per $-h$:

$$\frac{f(c-h)-f(c)}{-h} \geq 0$$

Facendo i limiti dei rapporti incrementali, si ha:

$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ limite della derivata destra

$\lim_{h \to 0} \frac{f(c-h)-f(c)}{-h}$ limite della derivata sinistra

Quindi

$$f'_+(c) \leq 0 \qquad \text{e} \qquad f'_-(c) \geq 0$$

La funzione è derivabile in $[a, b]$ per cui

$$f'_+(c) = f'_-(c) = f' = 0$$

Geometricamente il teorema di Rolle significa che se una funzione $y = f(x)$ è continua in $[a, b]$, derivabile in $]a, b[$ e $f(a) = f(b)$, esiste almeno un punto c tale che la tangente in c è parallela all'asse delle x.