TEOREMA DI LAGRANGE

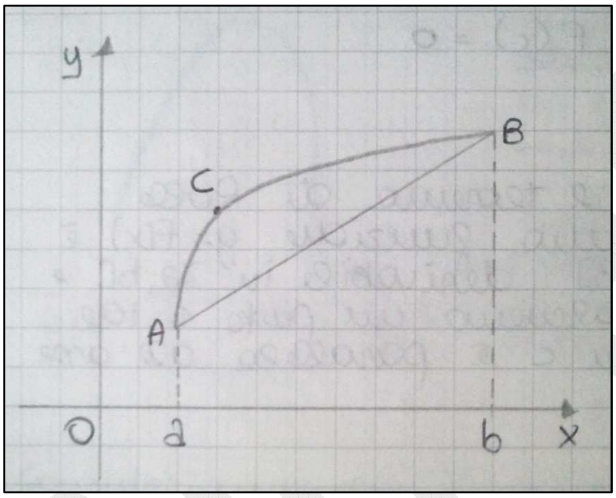
Data una funzione $y = f(x)$ continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$ e derivabile nell'intervallo aperto $]a, b[$, esiste almeno un punto c, interno all'intervallo $[a, b]$, tale che risulti $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

Hp
$f(x)$ è continua in $[a, b]$
$f(x)$ è derivabile in $]a, b[$

Th

$$\exists c \in \,]a, b[\, : \, f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Dimostrazione



Consideriamo il punto A di coordinate $(a, f(a))$ e il punto B di coordinate $(b, f(b))$. Il coefficiente angolare della retta $\overline{AB}$ è:

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Quindi esiste almeno un punto c interno all'arco AB in cui la retta tangente è parallela alla retta $\overline{AB}$.

Considero una funzione aggiuntiva:

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$

Applichiamo il teorema di Rolle a questa funzione. Per farlo dobbiamo verificare le ipotesi:
- $g(x)$ è sicuramente continua nell'intervallo $[a, b]$ perché contiene $f(x)$ che, per ipotesi, è continua in $[a, b]$
- $g(x)$ è sicuramente derivabile in $]a, b[$ perché contiene $f(x)$ che, per ipotesi, è derivabile in $]a, b[$
- $g(a) = g(b)$

  $g(a) = f(a) - f(b) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (a - a) = 0$

  $g(b) = f(b) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (b - a) = 0$

Quindi la funzione aggiuntiva gode delle ipotesi del teorema di Rolle e possiamo scrivere:

$$\exists c \in \,]a, b[\, : \; g'(c) = 0$$

Calcoliamo la derivata $g'(c) = 0$

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Per il teorema di Rolle poniamo la derivata uguale a zero:

$$g'(c) = 0 \qquad \rightarrow \qquad f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \qquad \rightarrow \qquad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

c.v.d.