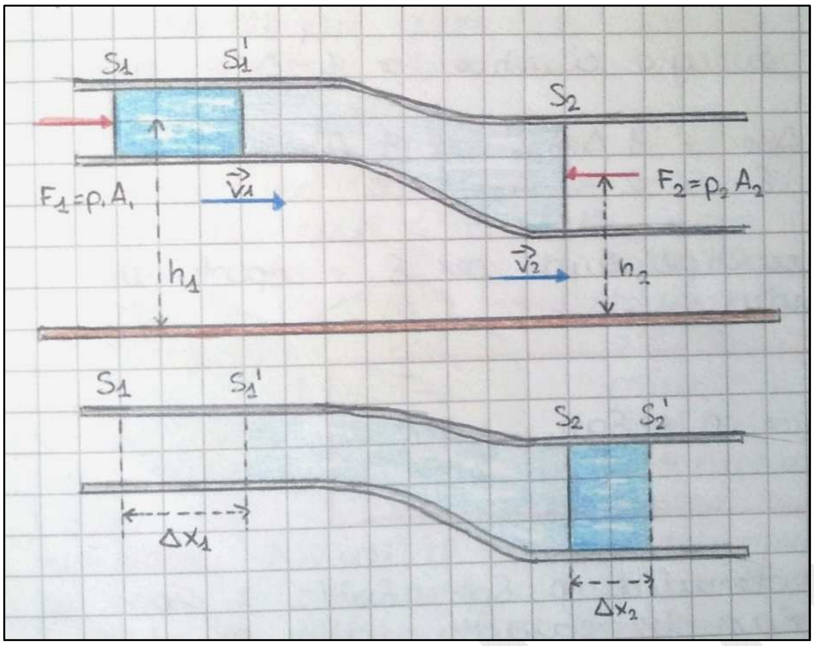
TEOREMA DI BERNOULLI



Consideriamo un condotto di sezione variabile nel quale scorre, in regime stazionario, un liquido perfetto di densità $\boldsymbol{\delta}$. Sia $\boldsymbol{p_1}$ la pressione agente su una qualsiasi sezione $\boldsymbol{S_1}$ di area $\boldsymbol{A_1}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{v_1}}$ la velocità, $\boldsymbol{h_1}$ la quota rispetto a un piano orizzontale di riferimento; siano $\boldsymbol{p_2}, \boldsymbol{A_2}, \overrightarrow{\boldsymbol{v_2}}, \boldsymbol{h_2}$ i corrispondenti valori relativi a un'altra sezione qualsiasi $\boldsymbol{S_2}$. La pressione $\boldsymbol{p_1}$ agisce nel senso del moto, essendo dovuta al liquido che preme da sinistra su $\boldsymbol{S_1}$; invece quella $\boldsymbol{p_2}$ agisce in senso contrario al moto, essendo dovuta al liquido sulla destra di $\boldsymbol{S_2}$, che per muoversi deve essere spinto da tergo e quindi ostacola il moto. Il liquido compreso tra $\boldsymbol{S_1}$ e $\boldsymbol{S_2}$ avanza verso destra e dopo un certo intervallo di tempo $\Delta \boldsymbol{t}$, viene a trovarsi tra $\boldsymbol{S_1'}$ e $\boldsymbol{S_2'}$. Ciò equivale a dire che una certa quantità di liquido di massa $\Delta \boldsymbol{m} = \boldsymbol{\delta} \cdot \Delta \boldsymbol{V}$ passa dal tratto di condotto compreso tra $\boldsymbol{S_1}$e $\boldsymbol{S_2}$ a quello compreso tra $\boldsymbol{S_2}$ e $\boldsymbol{S_2'}$ e in questo passaggio si ha la seguente variazione di energia cinetica:

$$E_C = \frac{1}{2}\Delta m v_2^2 - \frac{1}{2}\Delta m v_1^2$$

Calcoliamo ora il lavoro che fanno le forze agenti sul liquido, le quali sono di due tipi: forza di gravità e forze di pressione. Dato che la massa $\Delta \boldsymbol{m}$ passa dalla quota $\boldsymbol{h_1}$ a quella $\boldsymbol{h_2}$, il lavoro che fa su di essa la forza di gravità è:

$$\boldsymbol{L_G = \Delta m(h_1 - h_2)g}$$

Il lavoro che fa la forza $\overrightarrow{\boldsymbol{F_1}}$ è: $L_1 = F_1 \Delta x$, essendo $F_1 = p_1 A_1$ e $x_1 = \Delta V / A_1$, allora:

$$L_1 = \frac{p_1 \cdot A_1 \cdot \Delta V}{A_1} = p_1 \Delta V$$

E infine, essendo $\Delta V = \Delta m / \delta$, allora $\boldsymbol{L_1 = p_1 \cdot \Delta m / \delta}$ (positivo perché la forza è concorde al moto).
Per analogia il lavoro svolto dalla forza $\overrightarrow{\boldsymbol{F_2}}$ è $\boldsymbol{L_2 = -p_2 \cdot \Delta m / \delta}$ (negativo perché la forza è opposta al moto). Il lavoro complessivo è:

$$L = L_G + L_1 + L_2 = \Delta m(h_1 - h_2)g + p_1 \frac{\Delta m}{\delta} - p_2 \frac{\Delta m}{\delta}$$

Siccome per il teorema dell'energia cinetica è $L = \Delta E_C$, allora

$$\Delta m(h_1 - h_2)g + p_1 \frac{\Delta m}{\delta} - p_2 \frac{\Delta m}{\delta} = \frac{1}{2}\Delta m v_2^2 - \frac{1}{2}\Delta m v_1^2$$

Da cui, dividendo per Δm, moltiplicando per δ e spostando opportunamente alcuni termini, si ottiene:

$$p_1 + \delta g h_1 + \frac{1}{2}\delta v_1^2 = p_2 + \delta g h_2 + \frac{1}{2}\delta v_2^2$$

Dato che la somma dei tre termini $p, \delta gh, \delta v^2/2$ è la stessa per due sezioni qualsiasi del condotto, sarà la stessa anche per qualunque altra sezione, e quindi si può scrivere:

$$p + \delta g h + \frac{1}{2}\delta v^2 = costante$$

Ovvero: pressione + energia potenziale + energia cinetica = costante.
Questa è l'espressione matematica del **teorema di Bernoulli**.