TEOREMA DELL'UNICITÀ DEL LIMITE

Data la funzione $y = f(x)$ definita in X e con c punto di accumulazione, se esiste il limite della funzione per x tendente a c, esso è unico.

Hp	**Th**
$\exists \lim_{x \to c} f(x) = l$	Il limite è unico

Dimostrazione

Tale teorema si dimostra per assurdo negando la tesi. Supponiamo allora per assurdo che il limite non sia unico e che esista un altro limite:

$$\lim_{x \to c} f(x) = l_1$$

Supponiamo che $l > l_1$ e poniamo $\varepsilon = (l - l_1)/2$.
Dalla definizione di limite otteniamo:

$$\lim_{x \to c} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists H_1(c) : \forall x \in H_1(c) |f(x) - l| < \varepsilon$$
$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{l - \varepsilon < f(x)} < l + \varepsilon$$

$$\lim_{x \to c} f(x) = l_1 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists H_2(c) : \forall x \in H_2(c) |f(x) - l_1| < \varepsilon$$
$$|f(x) - l_1| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{l_1 - \varepsilon < f(x) < l_1 + \varepsilon}$$

Sia $H(c) = H_1(c) \cap H_2(c)$, per ogni $x \in H(c)$ sono valide le due relazioni: $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$ e $l_1 - \varepsilon < f(x) < l_1 + \varepsilon$.

$$\forall x \in H(c) \qquad l - \varepsilon < f(x) < l_1 + \varepsilon$$

$$l - \varepsilon < l_1 + \varepsilon$$

$$l - l_1 < 2\varepsilon$$

$$\varepsilon > \frac{l - l_1}{2}$$

Siamo quindi giunti ad una conclusione assurda in quando avevamo posto $\varepsilon = (l - l_1)/2$.
L'errore nasce nell'aver supposto l'esistenza del limite l_1. Ciò vuol dire che il limite è unico.