TEOREMA DEL CONFRONTO

Date tre funzioni $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ e $y = g(x)$ definite in X e con c punto di accumulazione, sia:

$$f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x)$$

Se $f(x)$ e $g(x)$ tendono, per $x \to c$, allo stesso limite finito l, allora anche $\varphi(x)$ ha come limite l.

Hp

$\lim_{x\to c} f(x) = l$; $\quad \lim_{x\to c} g(x) = l$

Th

$\lim_{x\to c} \varphi(x) = l$

Dimostrazione

Per ipotesi sappiamo che:

$$\lim_{x\to c} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0\ \exists H_1(c): \forall x \in H_1(c) - \{c\}\ |f(x) - l| < \varepsilon$$
$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{l - \varepsilon} < f(\boldsymbol{x}) < l + \varepsilon$$

$$\lim_{x\to c} g(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0\ \exists H_2(c): \forall x \in H_2(c) - \{c\}\ |g(x) - l| < \varepsilon$$
$$|g(x) - l| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{l - \varepsilon} < g(\boldsymbol{x}) < l + \varepsilon$$

Sia $H = H_1 \cap H_2$, per ogni $x \in H(c)$ valgono le due relazioni, quindi:

$$\forall x \in H(c) - \{c\} \qquad l - \varepsilon < f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x) < l + \varepsilon$$
$$l - \varepsilon < \varphi(x) < l + \varepsilon$$
$$|\varphi(x) - l| < \varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x\to c} \varphi(x) = l$$