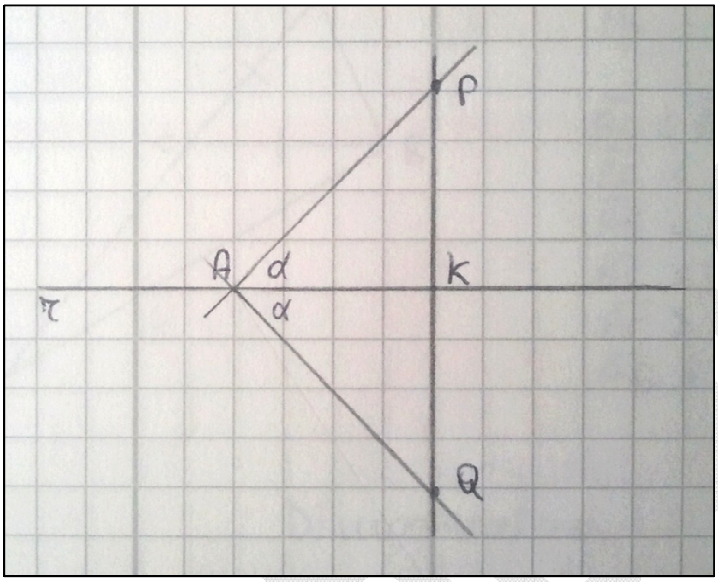
LE RETTE PERPENDICOLARI

TEOREMA. ***La perpendicolare per un punto ad una retta esiste sempre ed è unica.***

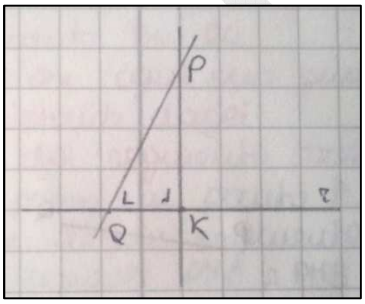


Dimostrazione

Supponiamo dapprima che il punto P appartenga alla retta r. Allora la perpendicolare per P è la bisettrice dell'angolo piatto di vertice P. Poiché la bisettrice di un angolo esiste sempre ed è unica, anche la perpendicolare per P esiste sempre ed è unica.
Consideriamo adesso il caso in cui P non appartiene alla retta r. Per determinare la perpendicolare seguiamo questa costruzione:

- tracciamo una qualunque retta per P che incontri r in A e che formi con essa un angolo α;
- per A, nel semipiano opposto a quello in cui si trova P, tracciamo una retta che formi con r un angolo congruente ad α;
- determiniamo su quest'ultima retta un punto Q in modo che $\overline{QA} \cong \overline{PA}$.

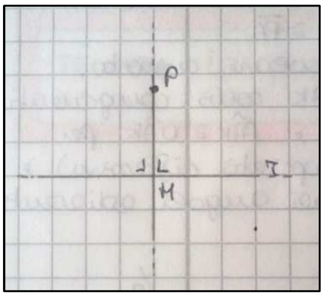
La retta PQ è la perpendicolare cercata.
Infatti i triangoli PAK e QAK sono congruenti per il primo criterio di congruenza e quindi $P\widehat{K}A \cong Q\widehat{K}A$, essendo tali angoli adiacenti, essi sono retti.



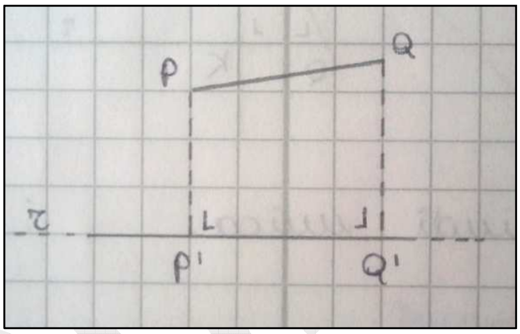
Supponiamo per assurdo che ci siano due rette distinte per P entrambe perpendicolari alla retta r; ciò è assurdo poiché in questo caso il triangolo PQK avrebbe due angoli retti. La perpendicolare P è quindi unica.

Quindi per il punto P passa una e una sola retta perpendicolare alla retta r.

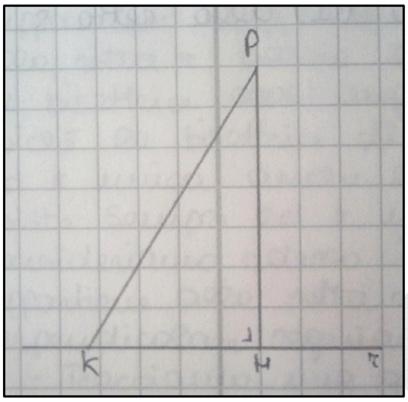
La relazione di perpendicolarità fra le rette ci permette di dare nuove definizioni.



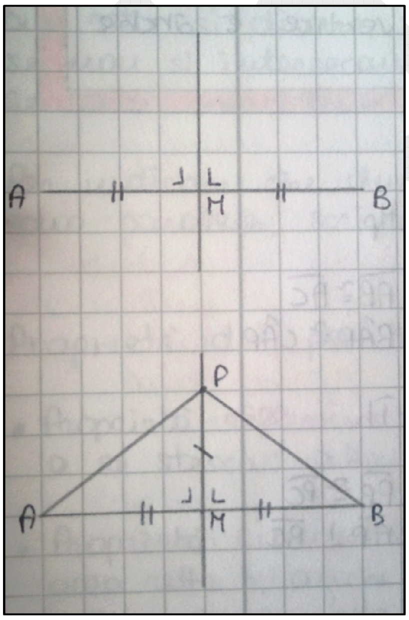
Dato un punto P del piano tracciamo la perpendicolare ad una retta r; il punto H di intersezione delle due rette si dice **piede della perpendicolare** da P su r o anche **proiezione ortogonale** di P su r.



Consideriamo un segmento PQ e siamo P' e Q' le proiezioni ortogonali di P e Q su r; il segmento $P'Q'$ si dice **proiezione ortogonale** di PQ su r.

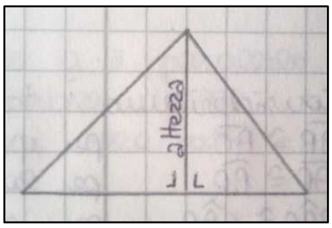


Quando si parla di distanza, si intende il percorso minimo che si deve fare per raggiungere un luogo partendo da un altro. Osservando che il percorso più breve che unisce due punti è il segmento che li congiunge, chiameremo **distanza fra due punti** il segmento che ha per estremi i due punti. Se abbiamo un punto e una retta, il segmento PH di perpendicolare è il segmento di minima lunghezza che congiunge P con r; qualunque altro segmento PK, infatti, è maggiore di PH, PH rappresenta allora la **distanza del punti P dalla retta s**.



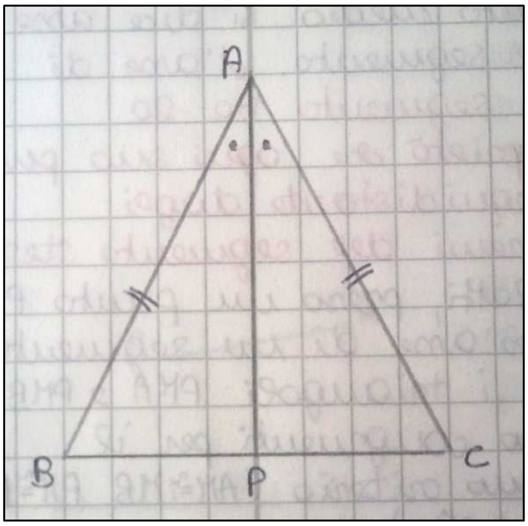
La retta perpendicolare ad un segmento nel suo punto medio, si dice asse del segmento. **L'asse di un segmento ha la proprietà che ogni suo punto è equidistante dagli estremi del segmento stesso**. Infatti, preso un punto P sull'asse di un segmento AB, i triangolo PMA e PMB sono congruenti per il primo criterio e quindi $PA \cong PB$.

Dato un triangolo, si dice **altezza** relativa ad un lato il segmento di perpendicolare condotto dal vertice opposto su quel lato. L'altezza di un triangolo, a differenza della mediana e della bisettrice che sono sempre interne, può essere anche esterna al triangolo. In generale, l'altezza, la mediana e la bisettrice relative ad un lato di un triangolo sono tre segmenti diversi; nel triangolo isoscele invece, l'altezza e la mediana relative alla base e la bisettrice dell'angolo al vertice coincidono.



Vale, infatti, il seguente teorema:

TEOREMA. ***In ogni triangolo isoscele la bisettrice dell'angolo al vertice è anche mediana e altezza.***



Hp
$\overline{AB} \cong \overline{AC}$
$B\hat{A}P \cong C\hat{A}P$

Th
$\overline{PB} \cong \overline{PC}$
$\overline{AP} \perp \overline{BC}$

Dimostrazione
Consideriamo i triangoli APB e APC, essi hanno:
$\overline{AB} \cong \overline{AC}$ per ipotesi
$\overline{AP} \cong \overline{AP}$ per la proprietà riflessiva della congruenza
$B\hat{A}P \cong C\hat{A}P$ per ipotesi
Quindi $APB \cong APC$ per il primo criterio di congruenza dei triangoli. Ne consegue che:
$\overline{BP} \cong \overline{PC}$ e quindi AP è mediana
$A\hat{P}B \cong A\hat{P}C$ e quindi, poiché due angoli congruenti e supplementari sono retti, AP è altezza.