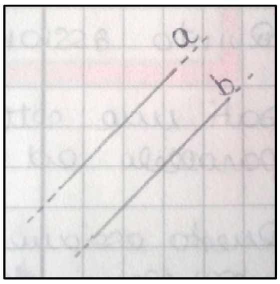
LE RETTE PARALLELE



DEFINIZIONE

Due rette si dicono **parallele** se non si intersecano oppure se sono coincidenti.
Per indicare che due rette a e b sono parallele, scriveremo $a \parallel b$.

PROPRIETÀ DEL PARALLELISMO

- **Proprietà riflessiva**: la retta a è parallela a se stessa: $a \parallel a$
- **Proprietà simmetrica**: se la retta a è parallela alla retta b, anche b è parallela ad a: $a \parallel b$ anche $b \parallel a$
- **Proprietà transitiva**: se la retta a è parallela alla retta b, e la retta b è parallela alla retta c, la retta a è parallela alla retta c: $a \parallel b$ e $b \parallel c$ allora $a \parallel c$.

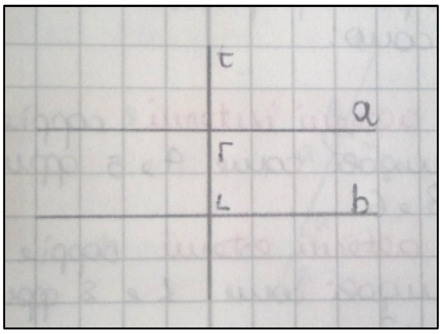
DIREZIONE

Si dice **direzione** la classe di equivalenza delle rette che sono tutte fra loro parallele. L'insieme di tutte le rette che hanno la stessa direzione si dice **fascio di rette parallele** o anche **fascio di rette improprio**.

QUINTO ASSIOMA DI EUCLIDE

Dati una rette r e un punto P, la parallela ad r per P è unica.
Questo assioma veniva enunciato come quinto nell'elenco delle regole poste da Euclide come vere a priori. Esso ha un posto di rilievo nella geometria perché la sua negazione ha portato nel XIX secolo, ad opera di alcuni matematici, alla costruzione di altre geometrie che pongono come assioma l'esistenza di più di una parallela ad una retta per un punto P, oppure la non esistenza di una tale parallele. Queste geometrie, proprio perché negano il quinto assioma di Euclide, vengono dette **geometrie non euclidee** e, in particolare, è detta *geometria iperbolica* quella secondo la quale per un punto passa più di una parallela ad una retta data, ed è detta *geometria ellittica* quella secondo la quale per un punto non passa alcuna parallela ad una retta data.

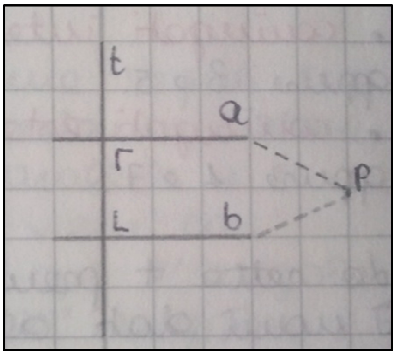
TEOREMA. *Se due rette sono perpendicolari ad una stessa retta, esse sono parallele.*



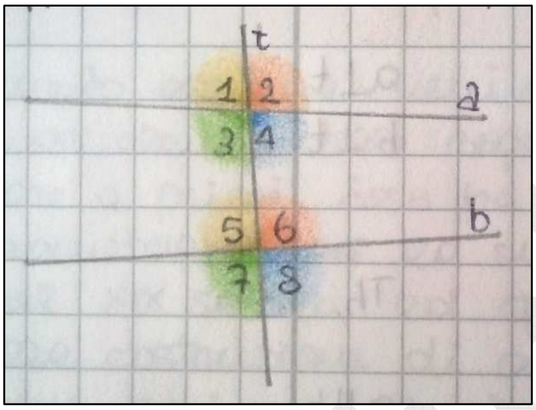
Hp
$a \perp t$
$b \perp t$

Th
$a \parallel b$

Dimostrazione
Il teorema si dimostra per assurdo, neghiamo la tesi e facciamo vedere che in questo modo cadiamo in una contraddizione. Supponiamo allora che a non sia parallela a b e quindi le due rette si incontrano in un punto P. Ci troviamo in questo modo nella situazione di avere due rette distinte uscenti dalla stesso punto che sono entrambe perpendicolari alla retta t. Ma, per l'unicità della perpendicolare, questo è assurdo e dobbiamo, quindi, concludere che abbiamo commesso un errore nel negare la tesi. Le rette a e b sono quindi parallele, come volevasi dimostrare.



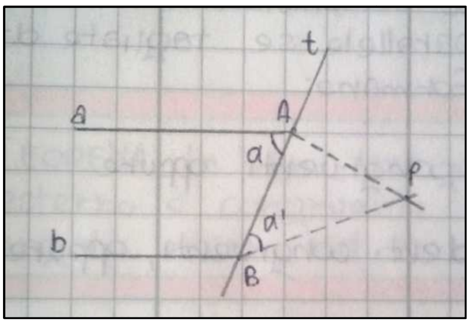
IL CRITERIO DI PARALLELISMO E LE PROPRIETÀ DELLE RETTE PARALLELE
Quando una retta t incontra altre due rette a e b, si vengono a formare otto angoli che, per la posizione che occupano, prendono a coppie nomi diversi. Si dicono:



- **alterni interni**, coppie di angoli come 4 e 5 oppure 3 e 6;
- **alterni esterni**, coppie di angoli come 1 e 8 oppure 2 e 7;
- **corrispondenti**, coppie di angoli come 1 e 5, 2 e 6, 3 e 7, 4 e 8;
- **coniugati interni**, coppie di angoli come 4 e 6 oppure 3 e 5;
- **coniugati esterni**, coppie di angoli come 2 e 8 oppure 1 e 7.

La retta t prende il nome di **trasversale**. I nomi dati alle coppie di angoli richiamano la loro posizione rispetto alle due rette a e b e alla trasversale t:
- **alterni**, significa che si trovano da parte opposta rispetto alla trasversale;
- **corrispondenti**, che occupano una posizione analoga rispetto alle due rette a e b e alla trasversale;
- **coniugati**, cha stanno dalla stessa parte rispetto alla trasversale;
- **interni**, che si trovano all'interno della zona delimitata dalle due rette;
- **esterni**, che si trovano all'esterno di tale zona.

TEOREMA. ***Se due rette, tagliate da una trasversale, formano angoli alterni interni congruenti, allora sono parallele.***



Hp
$\alpha \cong \alpha'$

Th
$a \parallel b$

Dimostrazione
La dimostrazione di questo teorema segue un ragionamento per assurdo. Supponiamo allora che le rette a e b non siano parallele e si incontrino in un punto P. Si viene così a formare il triangolo PAB di cui l'angolo α è esterno, α è maggiore di ciascuno degli angoli ad esso non adiacenti, quindi $\alpha > \alpha'$. Nell'ipotesi, però, era stato detto che $\alpha \cong \alpha'$. Siamo quindi giunti ad una contraddizione e possiamo concludere che la tesi è vera, cioè che $a \parallel b$.

Si può generalizzare il teorema precedente enunciando il seguente criterio:

CRITERIO GENERALE DI PARALLELISMO. ***Due rette sono parallele se, tagliate da una trasversale, formano:***
- **angoli alterni congruenti**, oppure
- **angoli corrispondenti congruenti**, oppure
- **angoli coniugati supplementari**.