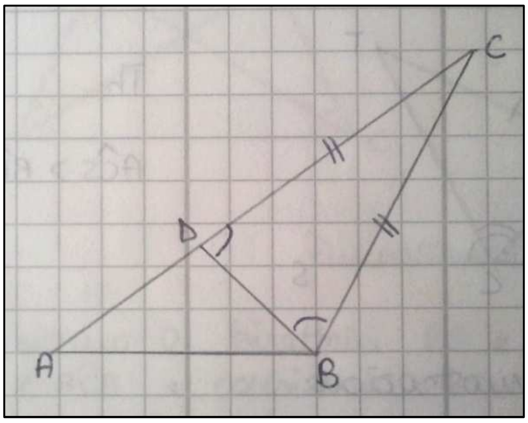
RELAZIONI FRA LATI ED ANGOLI DI UN TRIANGOLO

TEOREMA. ***In ogni triangolo, se due lati sono disuguali, al lato maggiore è opposto l'angolo maggiore.***

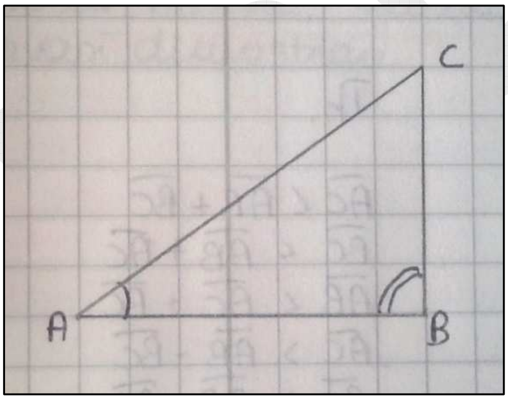


Hp
$\overline{AC} > \overline{BC}$

Th
$\hat{B} > \hat{A}$

Dimostrazione
Sul lato maggiore AC prendiamo un punto D in modo che $\overline{DC} \cong \overline{BC}$. Il triangolo DCB risulta isoscele, quindi $C\hat{D}B \cong C\hat{B}D$. L'angolo $C\hat{D}B$ è un angolo esterno al triangolo ABD e quindi $C\hat{D}B > D\hat{A}B$. Anche $C\hat{B}D > D\hat{A}B$, ma $C\hat{B}A > C\hat{B}D > D\hat{A}B$, quindi $\hat{B} > \hat{A}$, come volevasi dimostrare.

TEOREMA. ***In ogni triangolo, se due angoli sono disuguali, all'angolo maggiore è opposto il lato maggiore.***

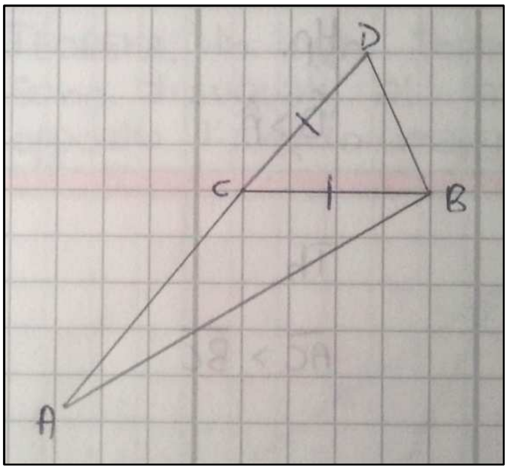


Hp
$\hat{B} > \hat{A}$

Th
$\overline{AC} > \overline{BC}$

Dimostrazione
La dimostrazione di questo teorema è per assurdo, ovvero una dimostrazione che consiste nel negare la tesi che porta a negare anche l'ipotesi, cosa impossibile perché l'ipotesi è sempre vera. Negando la tesi, diciamo che $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, ma questo implica che il triangolo ABC sia isoscele e che $\hat{B} \cong \hat{A}$, ma ciò è impossibile. Se diciamo che $\overline{AC} < \overline{BC}$, per il teorema precedente, $\hat{B} < \hat{A}$ e anche questo è impossibile. Pertanto non potendo essere $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ e $\overline{AC} < \overline{BC}$, allora $\overline{AC} > \overline{BC}$, come volevasi dimostrare.

TEOREMA. ***In ogni triangolo ciascun lato è minore della somma degli altri due ed è maggiore della loro differenza.***



Th
$\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$
$\overline{BC} < \overline{AB} + \overline{AC}$
$\overline{AB} < \overline{AC} + \overline{BC}$
$\overline{AC} > \overline{AB} - \overline{BC}$
$\overline{BC} > \overline{AB} - \overline{AC}$
$\overline{AB} > \overline{AC} - \overline{BC}$

Dimostrazione
Nel triangolo ABC, per costruzione, il lato AB è maggiore degli altri. Quindi, le prime due relazioni della tesi sono ovvie, essendo $\overline{AC} < \overline{AB}$ e di conseguenza $\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$ e $\overline{BC} < \overline{AB}$ e quindi $\overline{BC} < \overline{AB} + \overline{AC}$. Ci limitiamo a dimostrare la terza relazione.
Prolunghiamo AC dalla parte di C di un segmento $\overline{CD} \cong \overline{CB}$. Il triangolo CDB è isoscele sulla base DB e quindi $C\widehat{D}B \cong C\widehat{B}D$. Consideriamo ora il triangolo ABD. Di esso sappiamo che $A\widehat{D}B < A\widehat{B}D$ perché $A\widehat{D}B$ è congruente ad una parte di $A\widehat{B}P$. Quindi, poiché in un triangolo, all'angolo maggiore è opposto il lato maggiore, $\overline{AD} > \overline{AB}$, ma $\overline{AD} \cong \overline{AC} + \overline{CD}$ e poiché $\overline{CD} \cong \overline{CB}$, avremo $\overline{AD} \cong \overline{AC} + \overline{CB}$. Da ciò $\overline{AB} < \overline{AC} + \overline{CB}$, come volevasi dimostrare.
Quest'ultima relazione la scriviamo al contrario: $\overline{AC} + \overline{CB} > \overline{AB}$. A ciascun membro sottraiamo prima $\overline{AC}$ e poi $\overline{CB}$, otteniamo così: $\overline{AC} + \overline{CB} - \overline{AC} > \overline{AB} - \overline{AC}$ E $\overline{AC} + \overline{CB} - \overline{CB} > \overline{AB} - \overline{CB}$. Dimostriamo così le altre relazioni.
L'ultima relazione, $\overline{AB} > \overline{AC} - \overline{BC}$ è ovvia siccome $\overline{AB} > \overline{AC}$, quindi $\overline{AB} > \overline{AC} - \overline{CB}$, come volevasi dimostrare.