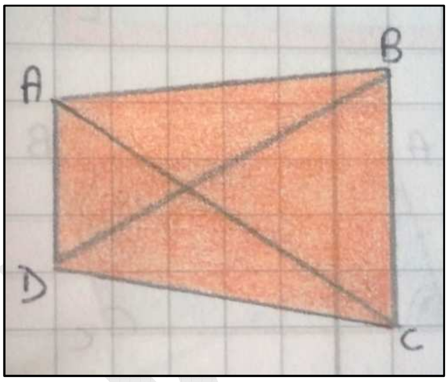
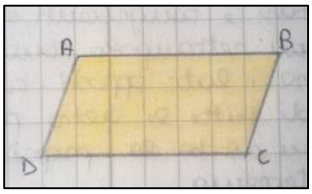
QUADRILATERI

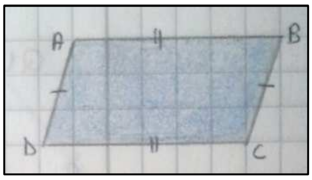
Un quadrilatero è un poligono che ha quattro lati, in esso:

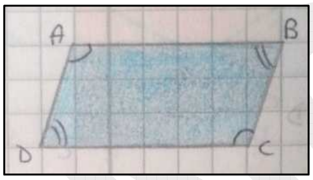


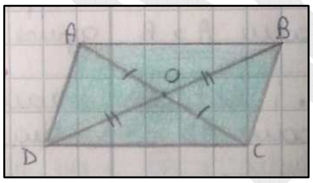
- i vertici A e C, Be D e i lati AB e CD, AD e BC sono **opposti**;
- i vertici che appartengono ad uno stesso lato, come A e B oppure A e D, sono **consecutivi**;
- i lati che hanno un vertice in comune, come AD e DC, sono **consecutivi**;
- gli angoli i cui vertici sono opposti, come gli angoli $D\hat{A}B$ e $D\hat{C}B$, si dicono **opposti**;
- gli angoli i cui vertici sono due vertici consecutivi del quadrilatero, come $A\hat{D}C$, $D\hat{C}B$ e $D\hat{A}B$, si dicono **adiacenti**;
- il segmento che unisce due vertici opposti è chiamato **diagonale**, come $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.

PARALLELOGRAMMI





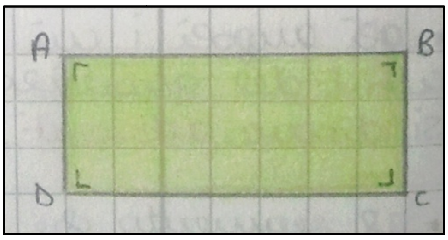




Si dice **parallelogramma** un quadrilatero convesso che ha un centro di simmetria. Ogni parallelogramma ha:

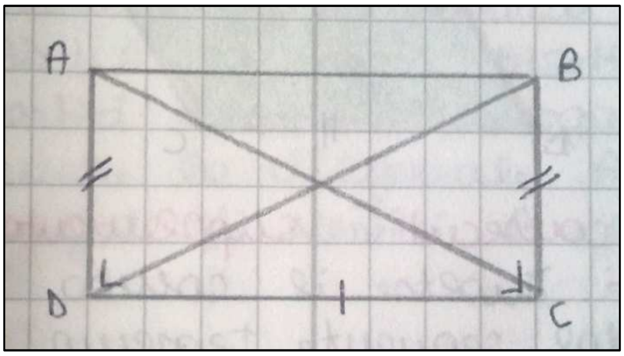
- i **lati opposti paralleli**, cioè $AB \parallel DC$ e $AD \parallel BC$
- i **lati opposti congruenti**, cioè $AB \cong DC$ e $AD \cong BC$
- gli **angoli adiacenti supplementari**, infatti, visto che i lati sono paralleli, due angoli adiacenti sono anche coniugati interni
- gli **angoli opposti congruenti**, cioè $A\hat{D}C \cong A\hat{B}C$ e $D\hat{A}B \cong B\hat{C}D$
- le **diagonali che si incontrano nel punto medio**, infatti il loro punto medio è il centro O.

RETTANGOLI



Si chiama **rettangolo** un parallelogramma cha ha tutti gli angoli congruenti.
In base a questa definizione possiamo dire che, poiché gli angoli adiacenti di un parallelogramma sono supplementari e due angoli supplementari e congruenti sono retti, gli angoli di un rettangolo sono tutti retti. Il rettangolo ha i lati opposti congruenti e paralleli e gode di tutte le altre proprietà dei parallelogrammi; in più ha la proprietà espressa dal seguente teorema:

TEOREMA. ***Un rettangolo ha le diagonali congruenti.***

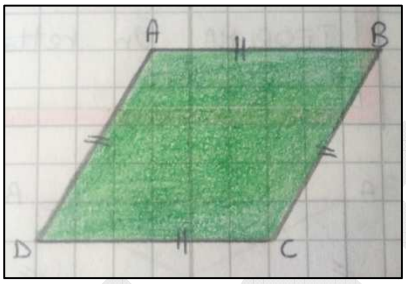


Hp
$ABCD$ è $un\ rettangolo$

Th
$\overline{AC} \cong \overline{BD}$

Dimostrazione
Consideriamo i triangoli ADC e DBC, rettangoli rispettivamente in D e C; di essi sappiamo che:
$\overline{DC} \cong \overline{DC}$ per la proprietà riflessiva della congruenza
$\overline{AD} \cong \overline{BC}$ perché lat opposti di un parallelogramma
Essi sono, dunque, congruenti perché hanno i cateti congruenti, in particolare avremo che $\overline{AC} \cong \overline{BD}$, come volevasi dimostrare.

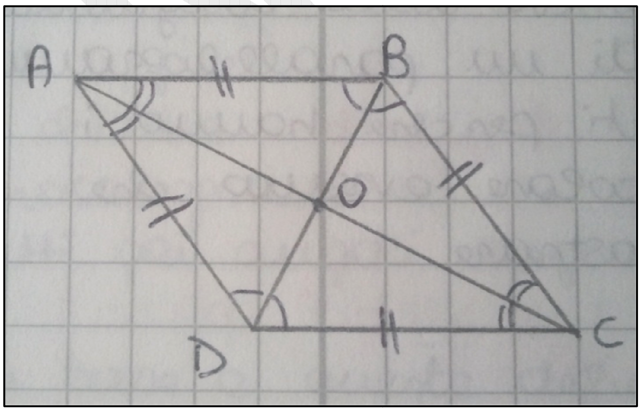
ROMBI



Si chiama **rombo** un parallelogramma con tutti i lati congruenti.

Un rombo conserva la caratteristica dei parallelogrammi di avere **angoli consecutivi supplementari** e **angoli opposti congruenti**. Inoltre il rombo ha la proprietà espressa dal seguente teorema:

TEOREMA. ***Un rombo ha le diagonali che sono fra loro perpendicolari e bisettrici degli angoli opposti.***



Hp
$ABCD$ è $un\ rombo$

Th
$\overline{AC} \perp \overline{BD}$
$A\hat{B}D \cong D\hat{B}C \quad \wedge \quad A\hat{D}B \cong B\hat{D}C$
$B\hat{A}C \cong C\hat{A}D \quad \wedge \quad B\hat{C}A \cong A\hat{C}D$

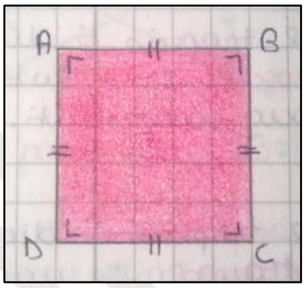
Dimostrazione

I triangoli ABC e ADC sono congruenti perché simmetrici rispetto al punto di incontro O delle diagonali e sono anche isosceli perché i lati di un rombo sono congruenti. La diagonale BD, passando per il centro O, è mediana per questi triangoli, ma in un triangolo isoscele la mediana relativa alla base è anche altezza e bisettrice, quindi $BD \perp AC$ e BD è bisettrice degli angoli di vertici B e D. Analogamente possiamo dire che anche la diagonale AC è bisettrice degli angoli di vertici A e C.

QUADRATI

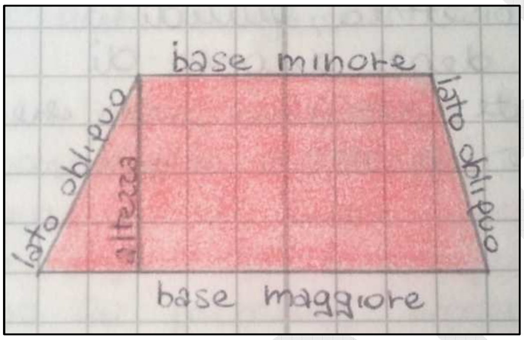
Si dice **quadrato** un parallelogramma che ha tutti i lati congruenti e tutti gli angoli congruenti.

Il quadrato è, quindi, contemporaneamente un rettangolo e un rombo, di conseguenza, oltre a tutte le proprietà dei parallelogrammi, avrà anche tutte le proprietà dei rettangoli e dei rombi e cioè: **le diagonali sono congruenti, sono perpendicolari, sono bisettrici degli angoli.**



TRAPEZI

Un **trapezio** è un quadrilatero che ha due lati paralleli.



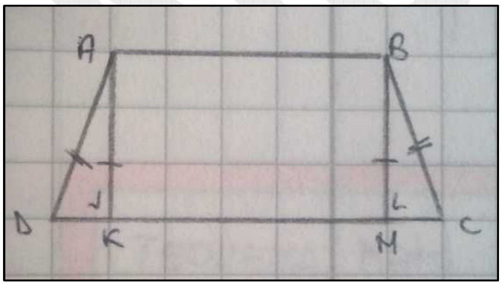
I lati paralleli di un trapezio si dicono **basi**, gli altri due lati si dicono **obliqui**, si dice inoltre **altezza** del trapezio la distanza fra le due basi.

Il trapezio si dice **scaleno** se i lati obliqui sono disuguali.

Il trapezio si dice **isoscele** se i lati obliqui sono congruenti.

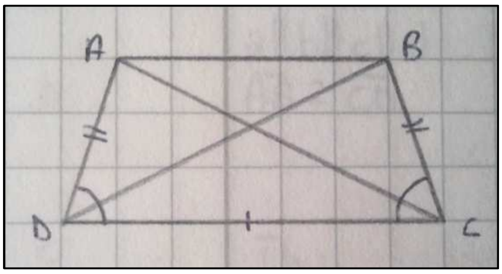
Il trapezio si dice **rettangolo** se uno dei due lati obliqui è perpendicolare alle basi.

Nel trapezio gli angoli adiacenti ai lati obliqui sono supplementari poiché coniugati interni rispetto alle basi parallele. Se il trapezio è isoscele, e solo in questo caso, si evidenziano alcune proprietà:



- **In un trapezio isoscele gli angoli adiacenti alla base sono congruenti.**

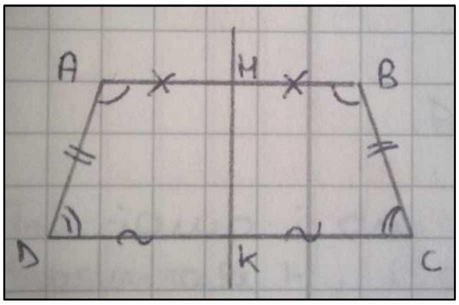
Infatti, se tracciamo le altezze, uscenti dai vertici A e B (i due segmenti sono congruenti perché rappresentano la distanza fra le rette parallele delle basi), i triangoli ADK e BCH sono congruenti perché hanno l'ipotenusa ed un cateto congruenti, di conseguenza anche gli angoli di vertice D e C sono congruenti. Inoltre $\hat{A} \cong \hat{B}$ perché supplementari di angoli congruenti.



- **In un trapezio isoscele le diagonali sono congruenti.**

Infatti, i triangoli ADC e DCB sono congruenti per il primo criterio (DC è in comune ai due triangoli, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ per ipotesi e $A\hat{D}C \cong B\hat{C}D$ per la precedente proprietà) e in particolare $\overline{AC} \cong \overline{DB}$.

- **Se un trapezio è isoscele, la retta che passa per i punti medi delle basi è asse di simmetria.**



Poiché $AH \cong HB$ e $DK \cong KC$, basta dimostrare che HK è perpendicolare alle basi del trapezio.
Osserviamo allora i quadrilateri $AHKD$ e $BHKC$: sono congruenti perché hanno tutti i lati ordinatamente congruenti e $H\hat{A}D \cong H\hat{B}C$ e $A\hat{D}K \cong B\hat{C}K$. Anche gli angoli $A\hat{H}K$ e $B\hat{H}C$ sono quindi congruenti e perciò retti, così come gli angoli $D\hat{K}H$ e $C\hat{K}H$; HK è quindi asse di simmetria del trapezio.