PROGRESSIONI ARITMETICHE

Due o più numeri si dicono in progressione aritmetica se la differenza di ogni numero e il suo precedente, se esiste, è una costante.

I numeri in progressione si dicono termini della progressione e si indicano con una lettera munita di un indice. Per indicare che i numeri $a_1, a_2, \dots, a_n$, …, sono in progressione aritmetica si usa scrivere:

$$\div\, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \;.$$

La differenza costante tra ogni termine e il suo precedente prende il nome di **ragione** della progressione e si indica con la lettera d.

- Se $d > 0$ la progressione è **crescente**
- Se $d < 0$ la progressione è **decrescente**
- Se $d = 0$ la progressione è formata da numeri costanti

Se di una progressione si considerano solo n termini consecutivi, la progressione è detta **finita**. Altrimenti la progressione è illimitata.

PROPRIETÀ

① **In una progressione aritmetica un termine qualsiasi è uguale al precedente aumentato della ragione.**

$$a_n = a_{n-1} + d$$

② **In una progressione aritmetica di ragione d il valore di un generico termine è dato dalla seguente formula:**

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Dimostrazione

Per definizione si ha $a_2 - a_1 = d;\;\; a_3 - a_2 = d;\;\; \dots;\;\; a_{n-1} - a_{n-2} = d;\;\; a_n - a_{n-1} = d$.

Sommando membro a membro otteniamo:

$$a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + \dots + a_{n-1} - a_{n-2} + a_n - a_{n-1} = d + d + \dots + d$$

Sopprimendo i termini opposti, si ha:

$$a_n - a_1 = (n-1)d \quad\Rightarrow\quad a_n = a_1 + (n-1)d$$

Questa formula è una relazione tra i quattro numeri a_1, a_n, n e d che permette di determinare ciascuno di essi quando siano noti gli altri tre.

③ **In una progressione aritmetica di ragione d il valore di un esse-esimo termine a_s, conoscendo un erre-esimo termine e la ragione, è dato dalla seguente formula**

$$a_s = a_r + (s - r)d$$

Dimostrazione
Per la formula espressa dalla seconda proprietà $a_r = a_1 + (r - 1)d$ e $a_s = a_1 + (s - 1)d$.
Sottraendo membro a membro le due uguaglianze, ottengo:

$$a_s - a_r = a_1 + (r - 1)d - a_1 - (s - 1)d \quad \Rightarrow \quad a_s - a_r = (s - r)d \quad \Rightarrow \quad a_s = a_r + (s - r)d$$

④ Occupiamoci ora del problema di inserire ***m medi aritmetici tra due numeri dati a e b***, si voglia, cioè, determinare m numeri $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ tali che i termini

$$a, x_1, x_2, x_3, \dots, x_m, b$$

siano in progressione aritmetica.

Basterà trovare la ragione d della progressione che si vuole costruire, perché, nota d, si avrà poi $x_1 = a + d$ e, via via, x_2 e tutti i rimanenti. Per trovare la ragione d si applica la formula $a_n = a_1 + (n - 1)d$, ponendo in essa $a_1 = a$, $a_n = b$ e $n = m + 2$. Quindi:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \quad \Rightarrow \quad b = a + (m + 1)d \quad \Rightarrow \quad d = \frac{b - a}{m + 1}$$

Quando si devono determinare i termini di una progressione aritmetica finita avente un numero **dispari** di termini, è conveniente assumere come incognite il termine centrale e la ragione, cioè indicare con x il termine centrale e con y la ragione. I termini incogniti della progressione saranno così espressi:

$$\div \dots x - 2y, x - y, x, x + y, x + 2y, \dots \ .$$

Se, invece, si devono determinare i termini di una progressione aritmetica avente un numero **pari** di termini è conveniente indicare la ragione con $2y$ e i due termini centrali, consecutivi, rispettivamente con $x - y$ e $x + y$, la progressione sarà quindi costituita dai seguenti termini:

$$\div \dots x - 3y, x - y, x + y, x + 3y, \dots \ .$$

SOMMA DEI TERMINI DI UNA PROGRESSIONE ARITMETICA FINITA

Due termini in progressione aritmetica finita si dicono **equidistanti** dagli estremi se il numero dei termini che precedono il primo è uguale al numero dei termini che seguono il secondo.
Sono, per esempio, equidistanti dagli estremi il primo e l'ultimo termine, il secondo e il penultimo termine, in generale i termini a_{1+k} e a_{n-k}, con $k \in N, k < n$, sono equidistanti dagli estremi.

In una progressione aritmetica finita, la somma di due termini equidistanti dagli estremi è uguale alla somma dei termini estremi.

Dimostrazione
Consideriamo la seguente progressione aritmetica finita

$$\div\, \underbrace{a_1, a_2, a_3, \dots, f}_{r}, \dots, \underbrace{g, \dots, a_n}_{r}$$

dove f e g sono equidistanti dagli estremi in quanto distano r termini dagli estremi. Sappiamo che

$$f = a_1 + (r-1)d \quad \text{e} \quad a_n = g + (r-1)d$$

Sottraendo membro a membro, si ottiene:

$$a_n - f = g + (r-1)d - a_1 - (r-1)d \quad \Rightarrow \quad a_n - f = g - a_1 \quad \Rightarrow \quad a_n + a_1 = g + f$$

La somma dei termini di una progressione aritmetica finita è uguale al prodotto della semisomma degli estremi per il numero dei termini.

Sia data la progressione $\div\, a_1, a_2, \dots, a_n$ e sia S_n la somma dei suoi n termini, si avrà:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

o anche, per la proprietà commutativa dell'addizione

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

Sommando membro a membro queste due uguaglianze si può scrivere:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Le espressioni entro parentesi o sono la somma dei due termini estremi o sono la somma di due termini equidistanti dagli estremi, per il precedente teorema, tali espressioni sono dunque tutte uguali ad $(a_1 + a_n)$. Il loro numero è evidentemente n e pertanto possiamo scrivere:

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n \quad \Rightarrow \quad \boxed{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n}$$