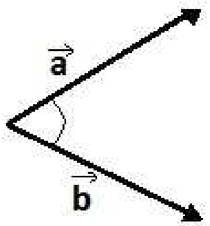
PRODOTTO SCALARE E PRODOTTO VETTORIALE

PRODOTTO SCALARE

Il **prodotto scalare** è il prodotto tra due vettori il cui risultato è un numero. Un esempio di prodotto scalare è il lavoro che si calcola moltiplicando la forza e lo spostamento.



$$c = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$c = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$$

Quindi il prodotto scalare di due vettori è dato dal prodotto dei loro moduli per il coseno dell'angolo tra essi compreso.

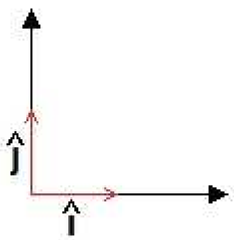
Il prodotto scalare è **massimo** quando i due vettori sono **paralleli** (poiché cos 0 = 1) mentre è **minimo** quando i vettori sono **antiparalleli**, ovvero quando formano un angolo di 180° (cos 180 = -1). Quando i due vettori sono perpendicolari il prodotto scalare è nullo (poiché cos 90 = 0).

Il **prodotto scalare per componenti** si calcola nel seguente modo:

$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath}$

$\vec{b} = b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath}) \cdot (b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath}) = a_x b_x\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} + a_x b_y\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} + a_y b_x\hat{\jmath} \cdot \hat{\imath} + a_y b_y\hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath}$

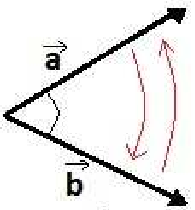


I vettori versori $\hat{\imath}$ e $\hat{\imath}$ formano un angolo di 0°, il cui coseno è 1, ugualmente i vettori versori $\hat{\jmath}$ e $\hat{\jmath}$, per questo il loro prodotto scalare è appunto 1. Invece i vettori versori $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$ formano un angolo di 90°, il cui coseno è 0, per questo il loro prodotto scalare è nullo per questo i termini $a_x b_y\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath}$ e $a_y b_x\hat{\jmath} \cdot \hat{\imath}$ si eliminano e rimane:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$$

PRODOTTO VETTORIALE

Il **prodotto vettoriale** è il prodotto tra due vettori il cui risultato è un vettore che ha una direzione e un verso. La **direzione** del vettore risultante è sempre quella perpendicolare al piano che contiene i due vettori, mentre il **verso** si trova nel seguente modo:



- $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

Se per sovrapporre il primo vettore $\vec{a}$ sul secondo $\vec{b}$ bisogna fare una **rotazione oraria**, il verso è **negativo**, cioè verso il basso.

- $\vec{d} = \vec{b} \times \vec{a}$

Se per sovrapporre il primo vettore $\vec{b}$ sul secondo $\vec{a}$ bisogna fare una **rotazione antioraria**, il verso è **positivo**, cioè verso l'alto.

Questa regola è detta ***della mano destra*** o ***della vite***: infatti quando giriamo una vite in senso orario, questa si avvita e va verso il basso, quando invece giriamo la vite in senso antiorario, essa si svita e va verso l'alto.

Per calcolare il prodotto vettoriale si usa la seguente formula:

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha$$

Quando i vettori sono **paralleli**, il prodotto vettoriale è **nullo**; quando invece formano un angolo retto il prodotto vettoriale è massimo.

Il **prodotto vettoriale per componenti** si calcola nel seguente modo:
$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath}$
$\vec{b} = b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath}$
$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath}) \times (b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath}) = a_xb_x\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} + a_xb_y\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} + a_yb_x\hat{\jmath} \cdot \hat{\imath} + a_yb_y\hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath}$

I vettori versori $\hat{\imath}$ e $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$ e $\hat{\jmath}$ formano angoli di 0° il cui seno è 0, per cui i termini $a_xb_x\hat{\imath} \cdot \hat{\imath}$ e $a_yb_y\hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath}$ si eliminano e rimane:

$$\vec{a} \times \vec{b} = +a_xb_y\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} + a_yb_x\hat{\jmath} \cdot \hat{\imath}$$