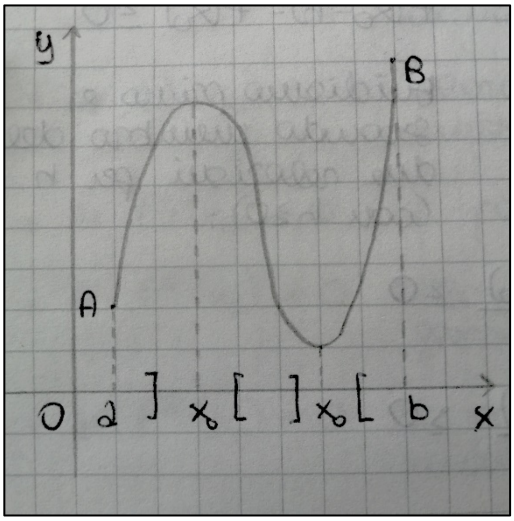
MASSIMO E MINIMO RELATIVO



Secondo il teorema di Weierstrass, una funzione $y = f(x)$ continua nell'intervallo $[a, b]$ ammette un massimo e un minimo assoluto.

$$m \leq f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

$$M \geq f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

Diremo che x_0 è **punto di massimo relativo** della funzione $f(x)$ se:

$$\exists H(x_0): f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in H(x_0)$$

Diremo che x_0 è **punto di minimo relativo** della funzione $f(x)$ se:

$$\exists H(x_0): f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in H(x_0)$$

TEOREMA SUI MASSIMI E MINIMI RELATIVI
Sia $y = f(x)$ una funzione continua nell'intervallo $[a, b]$ e derivabile nell'intervallo $]a, b[$.
Se nel punto x_0 la funzione ha un massimo o un minimo relativo, allora $f^I(x_0) = 0$.

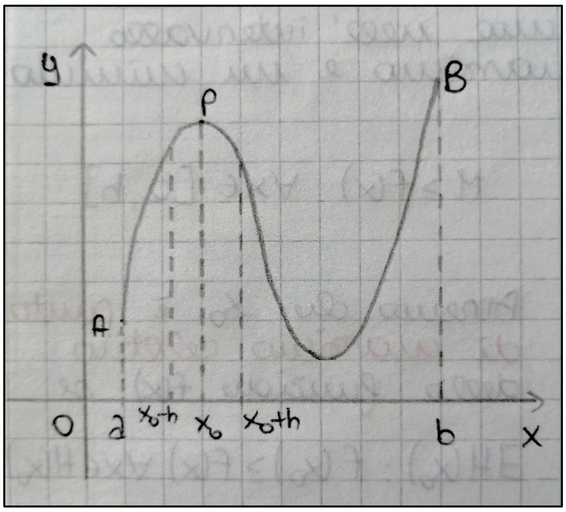
Hp.
$f(x)$ continua in $[a, b]$
$f(x)$ derivabile in $]a, b[$
x_0 punto di massimo o minimo relativo

Th. $f'(x_0) = 0$

Dimostriamo il teorema nel caso in cui x_0 sia un punto di massimo relativo. Per definizione di punto di massimo

$$\exists H(x_0): f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in H(x_0)$$

All'interno dell'intorno $H(x_0)$ consideriamo $x_0 + h$ e $x_0 - h$. Avremo



$$f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0$$
$$f(x_0 - h) - f(x_0) \leq 0$$

Dividiamo primo e secondo membro delle due relazioni per h:

per $h > 0$ $\qquad \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$

per $h < 0$ $\qquad \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h} \geq 0$

Facendo i limiti dei rapporti incrementali si ottiene la derivata destra (per $h > 0$) e la derivata sinistra (per $h < 0$)

$$f'_+(x_0) \leq 0 \qquad\qquad f'_-(x_0) \geq 0$$

Essendo la funzione derivabile in $]a, b[$ la derivata destra dev'essere uguale a quella sinistra e a quella ordinaria. Quindi:

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0) = 0$$

N.B. Se $f'(x_0) = 0$ non necessariamente x_0 è un punto di massimo o minimo relativo, potrebbe essere un punto flesso o tangente orizzontale.

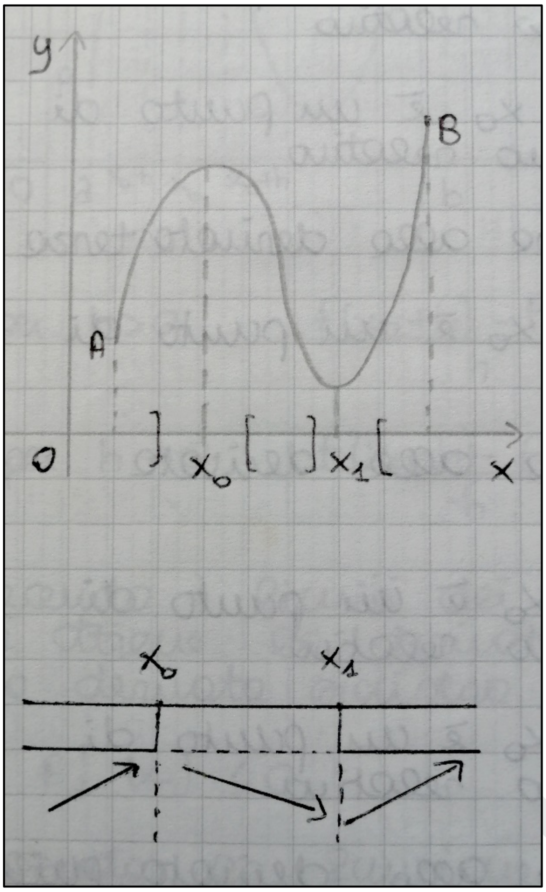
RICERCA DEI MASSIMI E MINIMI RELATIVI

Metodo delle derivate successive
Sia la funzione $y = f(x)$ definita e continua in $[a, b]$ derivabile in $]a, b[$ e sia $x_0 \in]a, b[$.
Si calcola la derivata prima e la si pine uguale a 0: $f'(x_0) = 0$.

- Se $f^{II}(x_0) > 0$, allora x_0 è un punto di minimo relativo;
- Se $f^{II}(x_0) < 0$, allora x_0 è un punto di massimo relativo;
- Se $f^{II}(x_0) = 0$, si passa alla derivata terza;
- Se $f^{III}(x_0) \neq 0$, allora x_0 è un punto di flesso;
- Se $f^{III}(x_0) = 0$, si passa alla derivata quarta;
- Se $f^{IV}(x_0) < 0$, allora x_0 è un punto di massimo relativo;
- Se $f^{IV}(x_0) > 0$, allora x_0 è un punto di minimo relativo;
- Se $f^{IV}(x_0) = 0$, si passa alla derivata quinta e così via.

Quindi, trovata la prima derivata dopo la derivata prima diversa da 0:

- se è di ordine pari, x_0 sarà punto di minimo relativo se $f^n(x_0) > 0$, mentre sarà punto di massimo relativo se $f^n(x_0) < 0$;
- se è di ordine dispari, allora il punto x_0 è un punto di flesso (a tangente orizzontale).



Metodo della crescenza e decrescenza della funzione

Dopo aver calcolato il dominio della funzione per individuare eventuali punti in cui essa non è definibile, si calcola la derivata prima $f'(x)$ e se ne studia il seguo.

Quando alla sinistra di x_0 la funzione cresce e alla destra decresce, x_0 è un punto di massimo relativo.

Quando a sinistra di x_1 la funzione decresce e a destra cresce, x_1 è un punto di minimo relativo.

x_0= massimo relativo
x_1= minimo relativo