LOGARITMI

Sia b un numero reale positivo ed a un numero reale, positivo, diverso da 1; si dice **logaritmo di b in base a** il valore x da attribuire come esponente alla base a per ottenere una potenza uguale all'argomento b.

$$\log_a b = x \quad : \quad a^x = b \qquad \text{con } a > 0, a \neq 1; \; b > 0$$

a è la **base** del logaritmo, b è l'**argomento**. Se l'argomento b è negativo, il logaritmo non ha nessun significato, pertanto **non esiste il logaritmo di un numero negativo**.

Nel calcolo dei logaritmi si usano comunemente i logaritmi in base 10 e quelli in base e, essendo e un particolare numero irrazionale il cui valore approssimato è 2,71828… . Sono quindi di uso comune:

- i **logaritmi naturali o neperiani**, la cui base è il numero irrazionale indicato con e
- i **logaritmi decimali o di Briggs**, la cui base è 10

Per indicare il logaritmo neperiano $\log_e N$ si scrive $\log N$ (omettendo la base e con la l minuscola) o più comunemente $\ln N$. Per indicare il logaritmo decimale $\log_{10} N$ si scrive $\operatorname{Log} N$ (senza base e con la L maiuscola).

Dalla definizione di logaritmo derivano le **proprietà fondamentali dei logaritmi**:

$$a^{\log_a b} = b \qquad a > 0, a \neq 1, b > 0$$

Infatti $\log_a b$ è l'esponente che occorre attribuire alla base a per ottenere b;

$$\log_a a^c = c \qquad a > 0, a \neq 1$$

Infatti l'esponente da attribuire ad a per ottenere a^c è proprio c. In particolare, da quest'ultima proprietà e dall'eguaglianza $a^0 = 1$, deriva che, qualunque sia il numero positivo $a \neq 1$, si ha:

$$\log_a 1 = 0 \qquad a > 0, a \neq 1$$

Analogamente, poiché è $a^1 = 0$, si ha

$$\log_a a = 1 \qquad a > 0, a \neq 1$$

Si può quindi affermare che *qualunque sia la base, purché positiva e diversa da 1, il logaritmo di 1 è uguale a zero e il logaritmo della base è uguale a 1.*

PROPRIETÀ DEI LOGARITMI

① Il logaritmo di un prodotto di due o più numeri positivi è uguale alla somma dei logaritmi dei singoli fattori.

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

Dimostrazione
Per definizione di logaritmo: $\log_a b = x : \ a^x = b$ e $\log_a c = y : \ a^y = c$.
Moltiplicando membro a membro si ottiene: $a^{x+y} = b \cdot c$.
Poiché l'esponente è sempre uguale al logaritmo del secondo membro con base uguale al primo membro, si ha: $x + y = \log_a b \cdot c$.
Quindi, essendo $x = \log_a b$ e $y = \log_a c$, si ha: $\log_a b + \log_a c = \log_a(b \cdot c)$.

② Il logaritmo di un quoziente di due numeri positivi è uguale alla differenza tra il logaritmo del dividendo e il logaritmo del divisore.

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

Dimostrazione
Per definizione di logaritmo: $\log_a b = x : \ a^x = b$ e $\log_a c = y : \ a^y = c$.
Dividendo membro a membro si ottiene: $a^x / a^y = b/c \quad \rightarrow \quad a^{x-y} = b/c$.
Per definizione di logaritmo si ha: $x - y = \log_a b/c$.
Essendo $x = \log_a b$ e $y = \log_a c$, allora $\log_a b - \log_a c = \log_a b/c$.

③ Il logaritmo della potenza di un numero positivo è uguale al prodotto dell'esponente per il logaritmo del numero.

$$\log_a b^c = c \cdot \log_a b$$

Dimostrazione
Per definizione di logaritmo si ha: $\log_a b = x : \ a^x = b$.
Elevando entrambi i membri alla c-esima potenza, avremo: $a^{xc} = b^c$.
Ancora per definizione di logaritmo si ha $xc = \log_a b^c$.
Essendo $x = \log_a b$, allora $c \cdot \log_a b = \log_a b^c$.

④ Il logaritmo di un radicale è uguale al prodotto del reciproco dell'indice del radicale per il logaritmo del radicando.

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$$

Dimostrazione
$\log_a \sqrt[n]{b} = \log_a b^{1/n}$
Per la terza proprietà, si ha: $\log_a b^{1/n} = \frac{1}{n}\log_a b$.
Quindi: $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n}\log_a b$.

ALTRE PROPRIETÀ

- $\log_a b = -\log_a \frac{1}{b}$
- $\log_a b = -\log_{\frac{1}{a}} b$
- $\log_a b = \log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{b}$
- $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
- $\log_a b = \frac{\log_n b}{\log_n a}$

FUNZIONE LOGARITMICA

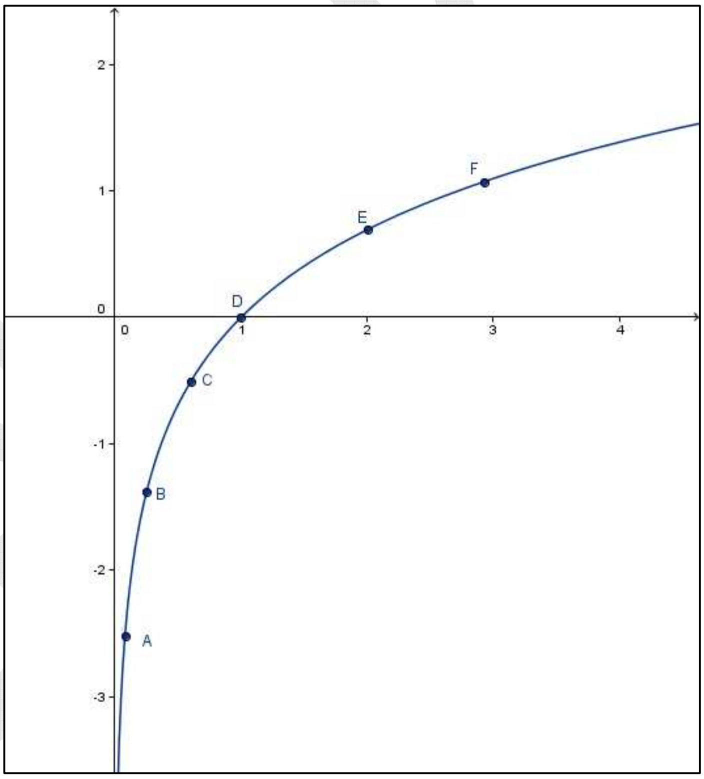
La **funzione logaritmica** di base a è l'inversa della funzione esponenziale di base a.

$$y = \log_a x \qquad \Leftrightarrow \qquad x = a^y$$

Anche in questo caso abbiamo due casi: $a > 1$ e $0 < a < 1$.

PRIMO CASO: $\boldsymbol{a} > 1$

Consideriamo la funzione $f: x \to \log_2 x$ che corrisponde all'equazione $y = \log_2 x$. Questa equivale all'equazione $x = 2^y$. Rappresentiamo la curva nel piano cartesiano.



Osservazioni :

- La funzione logaritmica interseca sempre l'asse delle x nel punto (1,0).
- Per a>1 la curva si trova sempre nel I e IV quadrante.
- L'asse delle y rappresenta l'asintoto verticale della curva.
- La funzione logaritmica è **crescente**.
- Se la base a della potenza a^y è maggiore di 1, la potenza cresce al crescere dell'esponente. I valori di x sono tutti positivi e tendono a diventare grandi quanto si vuole, tendono cioè all'infinito al crescere in definitivamente dell'esponente positivo. Ciò si esprime scrivendo:

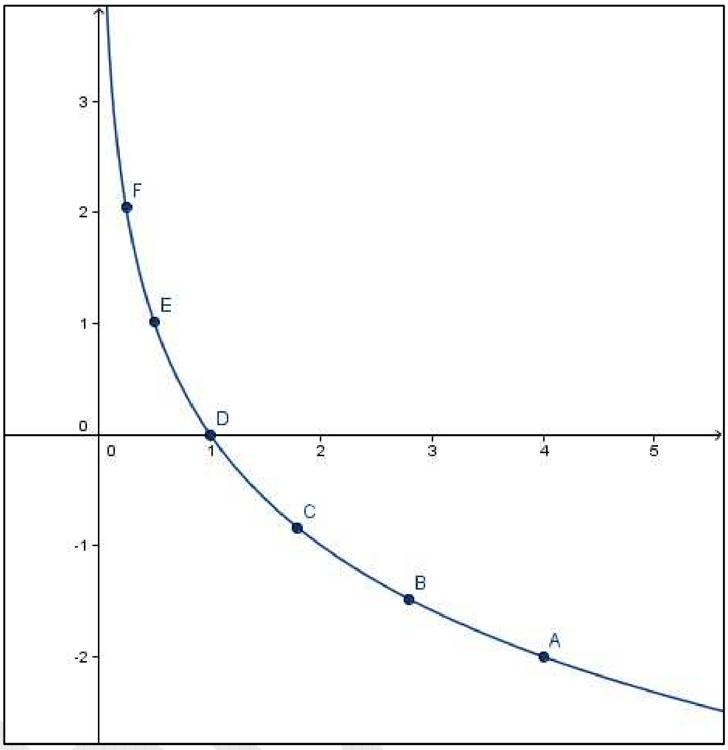
$$\lim_{x \to +\infty} \log_2 x = +\infty$$

- Sostituendo a y valori negativi, crescenti in valore assoluto, x assume ancora valori positivi, ma tende a diventare sempre più piccola. Ne segue che il diagramma, nel quarto quadrante, si avvicina asintoticamente all'asse y man mano che ci si allontana dall'origine. Ciò si esprime scrivendo:

$$\lim_{x \to 0^+} \log_2 x = -\infty$$

SECONDO CASO: $0 < a < 1$

Consideriamo la funzione $f: x \rightarrow \log_{\frac{1}{2}} x$ che corrisponde all'equazione $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. Questa equivale all'equazione $x = (1/2)^x$. Rappresentiamo la curva nel piano cartesiano.



Osservazioni:

- Anche in questo caso la funzione logaritmica interseca l'asse x nel punto (1, 0).

- La curva si trova nel I e IV quadrante.

- L'asse delle y rappresenta l'asintoto verticale della curva.

- La funzione è **decrescente**.

- L'ascissa dei punti della curva decresce indefinitamente quando y cresce per valori positivi:

$$\lim_{x \to 0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty$$

- L'ascissa dei punti della curva cresce indefinitamente quando y è negativo e cresce in valore assoluto.

$$\lim_{x \to +\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty$$