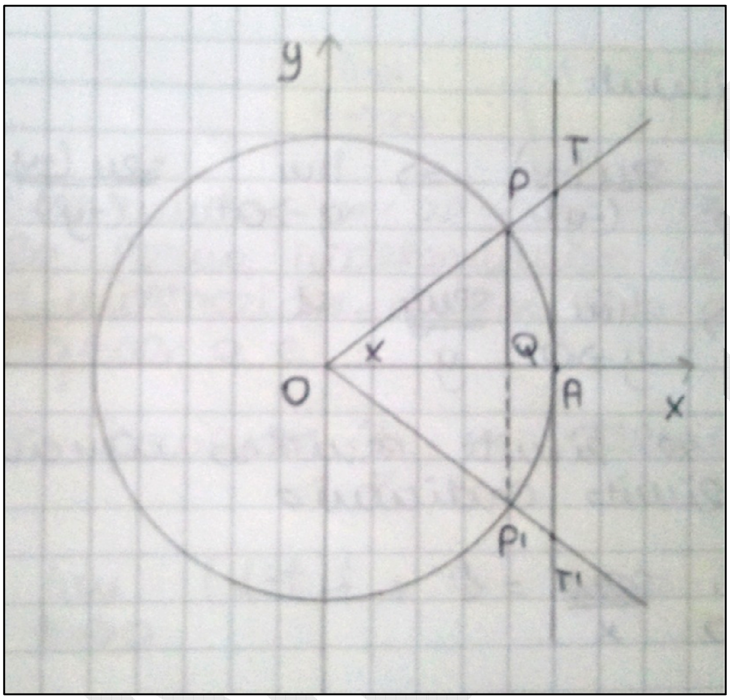
LIMITI NOTEVOLI

Vogliamo dimostrare il limite notevole

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$$

Se l'angolo x è misurato in radianti il limite è uguale a 1, se invece è misurato in gradi, il limite è uguale a $\pi/180°$. Consideriamo x in radianti.

Si noti che questo limite non si può calcolare con il teorema sul limite di un quoziente, perché esso si presenta nella forma indeterminata $[0/0]$. Allora dimostriamo prima che $\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$, poi $\lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$.



Consideriamo una circonferenza goniometrica. Dobbiamo dimostrare che:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{sen\ x}{x}=1 \qquad (0<x<\pi/2)$$

Sappiamo che $\overline{PQ}=sen\ x$, allora $\overline{P'P}=2sen\ x$. Sappiamo che $\overline{AT}=tg\ x$, quindi $\overline{T'T}=2tg\ x$.
L'arco AP corrisponde a x (angolo in radianti), quindi $P'AP=2x$.
Possiamo scrivere:

$$\overline{P'P}<P'AP<\overline{T'T}$$

$$2\operatorname{sen} x<2x<2\operatorname{tg} x$$

Dividiamo tutto per $2sen\ x$:

$$1<\frac{x}{\operatorname{sen} x}<\frac{1}{\cos x}$$

Poiché $a>b\rightarrow\ 1/a<1/b$ allora

$$1>\frac{\operatorname{sen} x}{x}>\cos x \qquad \rightarrow \qquad \cos x<\frac{\operatorname{sen} x}{x}<1$$

Applichiamo il teorema del confronto:

$$\lim_{x\to 0}\cos x=1; \quad \lim_{x\to 0}1=1 \qquad \rightarrow \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$$

Dimostriamo ora che $\lim_{x\to 0^-} \frac{sen\, x}{x} = 1$

Poniamo $x = -y$, quindi

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\text{sen}\, x}{x} \quad\rightarrow\quad \lim_{x\to 0^-} \frac{\text{sen}\,(-y)}{(-y)} \quad\rightarrow\quad \lim_{y\to 0^+} \frac{\text{sen}\,(-y)}{(-y)} \quad\rightarrow\quad \lim_{y\to 0^+} \frac{-\,\text{sen}\, y}{-y} \quad\rightarrow\quad \lim_{y\to 0^+} \frac{\text{sen}\, y}{y} = 1$$

Il limite destro e il limite sinistro coincidono, quindi esiste il limite ordinario

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = 1$$

Tale limite generalizzato assume la seguente forma:

$$\lim_{f(x)\to 0} \frac{\text{sen}\, f(x)}{f(x)} = 1$$

Dimostrazione del limite notevole

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - cos\, x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Il limite è dato nella forma indeterminata $[0/0]$. Allora moltiplichiamo numeratore e denominatore per $(1 + \cos x)$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} \cdot \frac{\text{sen}\, x}{x} \cdot \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Sostituendo ∞ al posto della x si ottiene la forma indeterminata $(1)^\infty$. Ma c'è una dimostrazione che ci dice che tale limite è uguale ad e.
Poniamo $1/x = t$, otteniamo:

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e \qquad\rightarrow\qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$$

Si dimostra:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot\log_a(1+x)\right]=\quad\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{1/x}=\log_a\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\log_a e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_e(1+x)}{x}=1$$

Dal precedente limite sappiamo che $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$. Se $a=e$, si avrà $\log_e e=1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\log a$$

Il limite si presenta nella forma indeterminata $[0/0]$. Poniamo:

$$a^x-1=t\quad\rightarrow\quad a^x=1+t\quad\rightarrow\quad x=\log_a(1+t)$$

Quindi:

$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)}\quad=\quad\lim_{t\to 0}\left[\frac{\log_a(1+t)}{t}\right]^{-1}\quad=\quad(\log_a e)^{-1}\quad=\quad\log a$$

Se $a=e$, si ha:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$