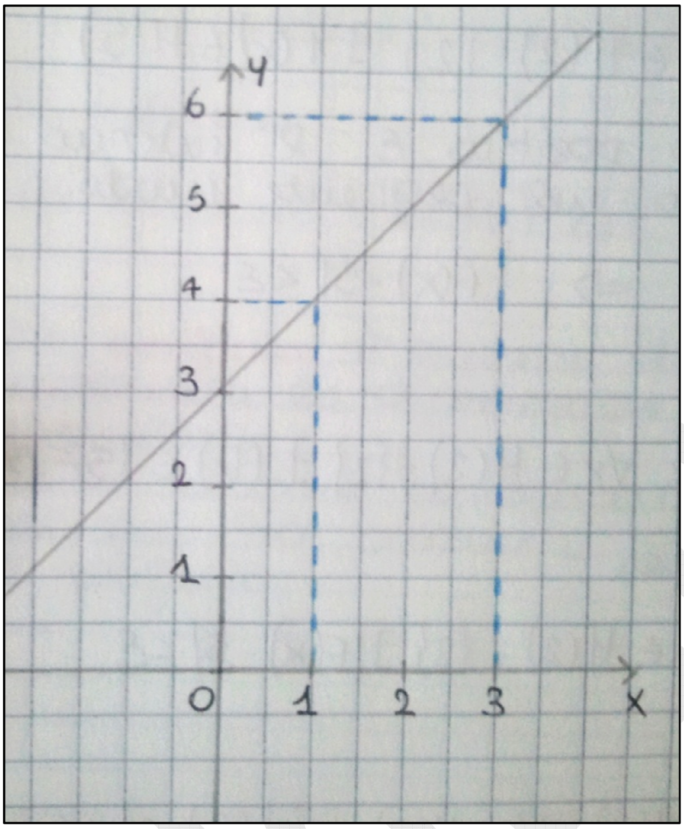
LIMITI

LIMITE FINITO DI UNA FUNZIONE PER x CHE TENDE A UN VALORE FINITO

Consideriamo la funzione $f(x) = [(x+3)(x-2)]/(x-2)$ il cui insieme di esistenza è $R - \{2\}$. Il punto 2 è un punto di accumulazione dell'insieme. Esaminiamo il comportamento della funzione quando si scelgono valori di x prossimi a 2, cioè prossimi al valore in cui la funzione non è definita.



x	y
0	1
1	4
1,1	4,1
1,2	4,2
1,3	4,3
1,4	4,4
1,5	4,5
1,6	4,6
1,7	4,7
1,8	4,8
1,9	4,9
2,1	5,1
2,2	5,2
2,3	5,3
2,4	5,4
2,5	5,5
2,6	5,6
2,7	5,7
2,8	5,8
2,9	5,9
3	6

Come si vede, quanto più la x si avvicina al valore 2, tanto più f(x) si avvicina al valore 5.
Si usa dire che "*per x tendente a 2, $f(x)$ ha per limite 5*".

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 5$$

Comunque di fissi un intorno di 5, a esso corrisponde un intorno di 2, in modo che per ogni x appartenente all'intorno di 2 corrisponde f(x) appartenente all'introno di 5. In simboli:

$$\forall H(5) \exists H(2): \forall x \in H(2) - \{2\} \exists f(x) \in H(5)$$

Fissato un numero positivo ε, l'intorno di 5 può essere scritto nel seguente modo:

$$]5 - \varepsilon, 5 + \varepsilon[\quad \Rightarrow \quad |f(x) - 5| < \varepsilon$$

Quindi:

$$]5-\varepsilon, 5+\varepsilon[\ \exists H(2): \forall x \in H(2)-\{2\} \exists f(x) \in\ ]5-\varepsilon, 5+\varepsilon[$$

Che equivale a scrivere:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists H(2): \forall x \in H(2)-\{2\} \ \exists \ |f(x)-5| < \varepsilon$$

In conclusione:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists H(2): \ \forall x \in H(2)-\{2\} \ |f(x)-5| < \varepsilon$$

Possiamo ora dare la definizione generale di limite:

Sia $y = f(x)$, sia X il suo dominio, sia c punto di accumulazione di X e sia l un numero finito, dire che **per x tendente a c, la funzione $y = f(x)$ ha per limite l**

$$\lim_{x\to c} f(x) = l$$

Equivale a dire che, **se comunque si scelga un numero positivo ε, arbitrariamente piccolo, si può determinare, in corrispondenza a esso, un intorno completo di c, tale che, per ogni x di tale intorno (escluso al più $x = c$) si abbia $|f(x) - l| < \varepsilon$.**

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists H(c): \ \forall x \in H(c)-\{c\} \ |f(x)-l| < \varepsilon$$

Si noti che:

$$|f(x)-l| < \varepsilon \ \Leftrightarrow \ -\varepsilon < f(x) < \varepsilon \ \Leftrightarrow \ \ l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon$$

Per **verificare** l'esattezza di un limite bisogna considerare la disequazione finale in modulo e risolverla. Se le soluzioni costituiscono un intono di c per ogni $\varepsilon > 0$, comunque piccolo, il limite è verificato.

LIMITE INFINITO DI UNA FUNZIONE PER x CHE TENDE A UN VALORE FINITO

$$\lim_{x\to c} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall H(+\infty) \exists H(c): \forall x \in H(c) f(x) \in H(+\infty)$$

$$\downarrow$$

$$\lim_{x\to c} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M > 0 \ \exists H(c): \forall x \in H(c) f(x) > M$$

$$\lim_{x\to c} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall H(-\infty) \exists H(c): \forall x \in H(c) f(x) \in H(-\infty)$$

$$\downarrow$$

$$\lim_{x \to c} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M > 0\, \exists H(c) : \forall x \in H(c) f(x) < -M$$

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall H(\infty) \exists H(c) : \forall x \in H(c) f(x) \in H(\infty)$$

$$\downarrow$$

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M > 0\, \exists H(c) : \forall x \in H(c) |f(x)| > M$$

LIMITE FINITO DI UNA FUNZIONE PER x CHE TENDE ALL'INFINITO

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall H(l) \exists H(+\infty) : \forall x \in H(+\infty) f(x) \in H(l)$$

$$\downarrow$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\, \exists M > 0 : \; \forall x > M\; |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall H(l) \exists H(-\infty) : \forall x \in H(-\infty) f(x) \in H(l)$$

$$\downarrow$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\, \exists M > 0 : \; \forall x < -M\; |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall H(l) \exists H(\infty) : \forall x \in H(\infty) f(x) \in H(l)$$

$$\downarrow$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\, \exists M > 0 : \; \forall |x| > M\; |f(x) - l| < \varepsilon$$

LIMITE INFINITO DI UNA FUNZIONE PER x CHE TENDE ALL'INFINITO

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M > 0\, \exists\, N > 0 : \; \forall x > N\; f(x) > M$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M > 0\, \exists\, N > 0 : \; \forall x > N\; f(x) < -M$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M > 0\, \exists\, N > 0 : \; \forall x > N\; |f(x)| > M$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M > 0\, \exists\, N > 0 : \; \forall x < -N\; f(x) > M$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M > 0 \; \exists \; N > 0 : \; \forall x < -N \; f(x) < -M$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M > 0 \; \exists \; N > 0 : \; \forall x < -N \; |f(x)| > M$$

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M > 0 \; \exists \; N > 0 : \; \forall |x| > N \; f(x) > M$$

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M > 0 \; \exists \; N > 0 : \; \forall |x| > N \; f(x) < -M$$

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M > 0 \; \exists \; N > 0 : \; \forall |x| > N \; |f(x)| > M$$