LIMITE DELLA SOMMA ALGEBRICA DI FUNZIONI

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni definite in X che ammettono, per $x \to c$, limiti finiti, allora il limite della somma delle due funzioni esiste ed è la somma dei loro limiti e il limite della differenza delle due funzioni esiste ed è la differenza dei loro limiti.

Hp

$$\lim_{x\to c} f(x) = l_1 \quad , \quad \lim_{x\to c} g(x) = l_2$$

Th

$$\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)] = l_1 + l_2$$

Dimostrazione

Per ipotesi sappiamo che:

$$\lim_{x\to c} f(x) = l_1 \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0\ \exists H_1(c): \forall x \in H_1(c)-\{c\}\ |f(x)-l_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\lim_{x\to c} g(x) = l_2 \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0\ \exists H_2(c): \forall x \in H_2(c)-\{c\}\ |g(x)-l_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ricordando che $|a+b| \leq |a|+|b|$ con $a, b \in R$, sommiamo membro a membro:

$$|f(x)-l_1| + |g(x)-l_2| < \varepsilon$$

Sia $H = H_1 \cap H_2$ per ogni $x \in H(c)$ possiamo scrivere:

$$\forall x \in H(c)-\{c\} \qquad |f(x)-l_1+g(x)-l_2| \leq |f(x)-l_1| + |g(x)-l_2| < \varepsilon$$

$$|f(x)-l_1+g(x)-l_2| < \varepsilon$$

$$|[f(x)+g(x)]-(l_1+l_2)| < \varepsilon$$

In conclusione

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists H(c): \forall x \in H(c)-\{c\}\ |[f(x)+g(x)]-(l_1+l_2)| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{x\to c}[f(x)+g(x)] = l_1 + l_2$$

Considerazioni

l_1	l_2	$l_1 + l_2$
+∞	n. finito	+∞
-∞	n. finito	-∞
∞	n. finito	∞
0	+∞	+∞
+∞	-∞	forma indeterminata
-∞	+∞	forma indeterminata

l_1	l_2	$l_1 - l_2$
+∞	n. finito	+∞
n. finito	+∞	-∞
+∞	-∞	+∞
-∞	+∞	-∞
+∞	+∞	forma indeterminata
-∞	-∞	forma indeterminata