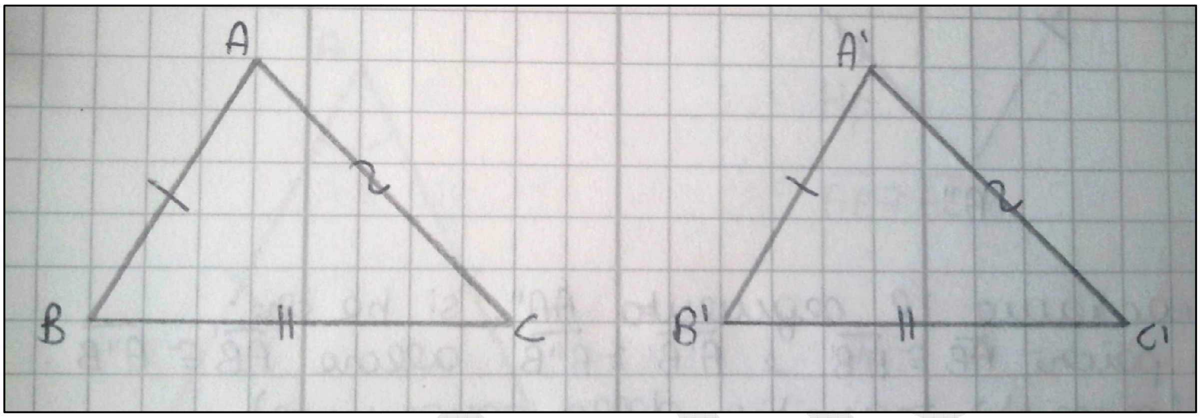
IL TERZO CRITERIO
DI CONGRUENZA DEI TRIANGOLI

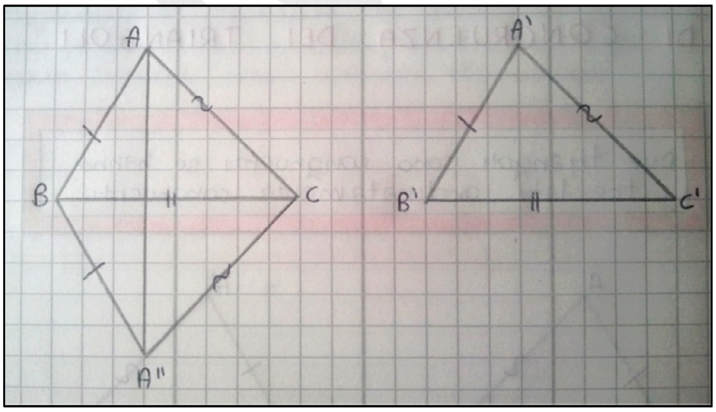
Due triangoli sono congruenti se hanno i tre lati ordinatamente congruenti.



Hp
$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$
$\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$
$\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$

Th
$ABC \cong A'B'C'$

Dimostrazione
Dal vertice B e nel semipiano opposto a quello del triangolo rispetto alla retta del lato BC, tracciamo una semiretta che formi con BC un angolo congruente a $\widehat{B'}$, su tale semiretta prendiamo un punto A'' in modo che $\overline{A''B} \cong \overline{A'B'}$ e tracciamo il segmento $\overline{CA''}$. Il triangolo BCA''è congruente al triangolo $A'B'C'$ per il primo criterio di congruenza.



Tracciamo il segmento AA'', si ha che:

- poiché $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ e $\overline{A'B'} \cong \overline{A''B}$ allora $\overline{AB} \cong \overline{A''B}$ (proprietà transitiva della congruenza)
- poiché $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ e $\overline{A'C'} = \overline{A''C}$ allora $\overline{AC} \cong \overline{A''C}$ (proprietà transitiva della congruenza).

I triangoli ABA'' e ACA'' sono dunque isosceli e quindi $B\hat{A}A'' \cong B\hat{A}''A$ e $C\hat{A}A'' \cong C\hat{A}''A$.

Allora $B\hat{A}C \cong B\hat{A}''C$ perché somme di angoli uguali. Torniamo a considerare i triangoli ABC e $A''BC$, di essi sappiamo che:

$\overline{AB} \cong \overline{A''B}$
$\overline{AC} \cong \overline{A''C}$
$B\hat{A}C \cong B\hat{A}''C$
Essi sono congruenti per il primo criterio di congruenza. In definitiva $ABC \cong A''BC$, $A''BC \cong A'B'C'$ per costruzione, quindi $ABC \cong A'B'C'$ per la proprietà transitiva, come volevasi dimostrare.