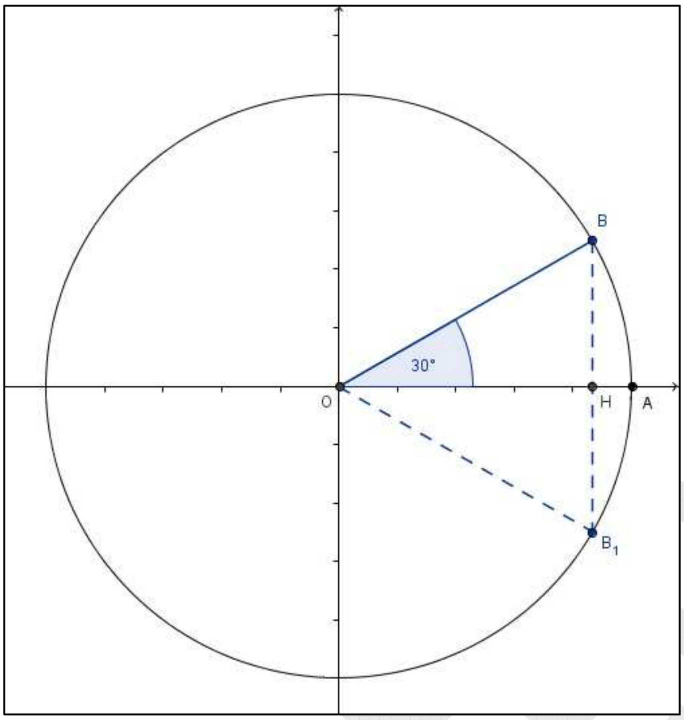
FUNZIONI GONIOMETRICHE
DI ANGOLI PARTICOLARI

ANGOLO DI 30°



Consideriamo la circonferenza goniometrica e sia $A\hat{O}B = 30°$. Si prolunghi la perpendicolare BH all'asse x fino a incontrare in B' la circonferenza. Il triangolo OBB' è isoscele per avere $OB \cong OB'$ e quindi OH è bisettrice e mediana. Risulta così $B\hat{O}B' = 60°$ e il triangolo BOB', per avere i tre angoli di 60°, è equilatero. Sarà pertanto:

$$OB = \overline{OB'} = \overline{BB'} = 1$$
$$\downarrow$$
$$\overline{HB} = \frac{1}{2}$$

Per il teorema di Pitagora applicato al triangolo OHB, si ha:

$$\overline{OH} = \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{HB}^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

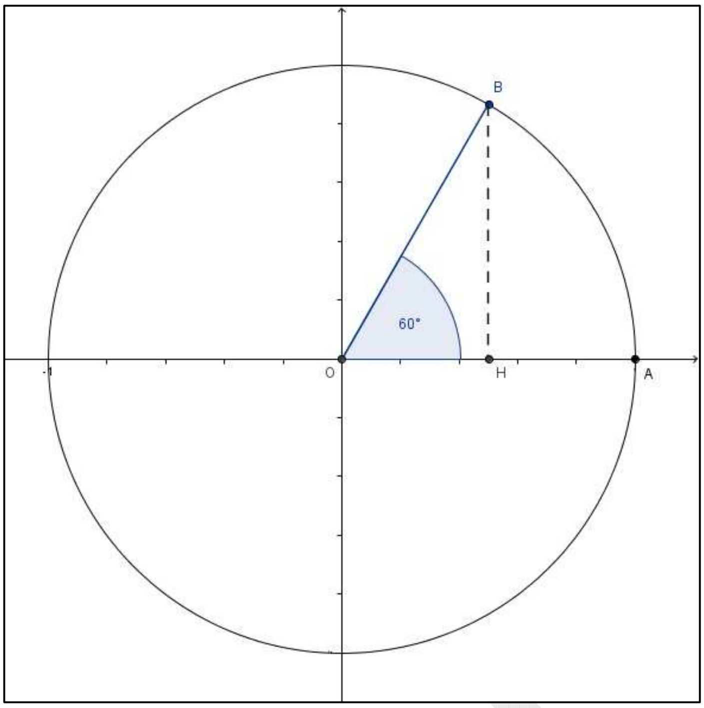
Per definizione è $\sin 30 = y_b = HB$ ed è $\cos 30 = x_B = OH$:

$$\sin 30 = \frac{1}{2} \qquad \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Essendo poi $\tan 30 = \sin 30/\cos 30 = \sqrt{3}/3$. Quindi

$$\tan 30 = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \cot 30 = \sqrt{3}$$

ANGOLO DI 60°



Consideriamo la circonferenza goniometrica e sia $A\hat{O}B = 60°$ e H la proiezione di B sull'asse x. Il triangolo OHB è rettangolo con gli angoli $H\hat{O}B = 60°$ e $O\hat{B}H = 30°$, quindi si avrà OH, il cateto opposto all'angolo di 30°, congruente alla metà dell'ipotenusa OB:

$$\overline{OH} = \frac{1}{2}OB \quad \rightarrow \quad \overline{OH} = \frac{1}{2}$$

Per il teorema di Pitagora applicato al triangolo OHB si ricava $\overline{HB} = \sqrt{3}/2$

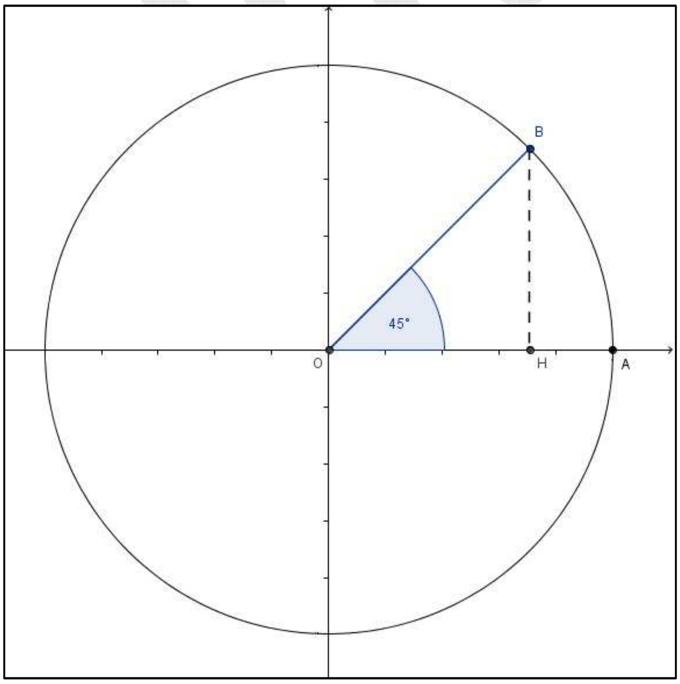
$$\sin 60 = y_B = HB \quad \rightarrow \quad \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60 = x_B = OH \quad \rightarrow \cos 60 = \frac{1}{2}$$

Essendo poi $\tan 60 = \sin 60/\cos 60 = \sqrt{3}$. Quindi:

$$\tan 60 = \sqrt{3} \qquad \cot 60 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ANGOLO DI 45°



Consideriamo una circonferenza goniometrica, sia $A\hat{O}B = 45°$ e sia H la proiezione ortogonale di B sull'asse x. Essendo $A\hat{O}B = 45°$, anche $H\hat{B}O = 45°$. Quindi il triangolo OHB è isoscele e $OH = HB$. Per il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo OHB si ha:

$$HB^2 + OH^2 = OB^2 \quad \rightarrow \quad 2HB^2 = 1$$

$$HB^2 = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad HB = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Quindi:

$$\sin 45 = y_B = HB \quad \rightarrow \sin 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45 = x_B = OH \quad \rightarrow \quad \boxed{\cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Essendo poi $\tan 45 = \sin 45/\cos 45 = 1$, allora:

$$\tan 45 = 1 \qquad \cot 45 = 1$$

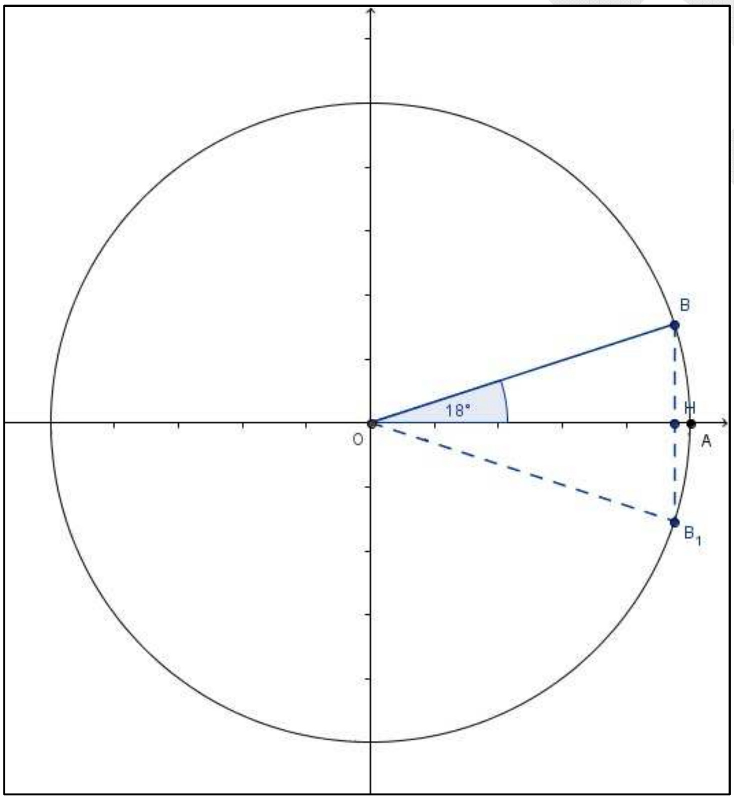
ANGOLO DI 18°

Prima di individuare le funzioni goniometriche dell'angolo di 18°, bisogna sapere che cos'è la **sezione aurea**. Per sezione aurea di un segmento AB si intende la parte del segmento AP che è media proporzionale tra l'intero segmento e la parte rimanente PB. Quindi:

$$AB : AP = AP : PB \quad \Rightarrow \quad a : x = x : (a - x)$$

$$x^2 = a(a - x) \quad \rightarrow \quad x^2 = a^2 - ax \quad \rightarrow \quad x^2 + ax - a^2 = 0$$

$$x = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} = \frac{-a + a\sqrt{5}}{2} = a\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)$$



Consideriamo la circonferenza goniometrica. Sia $A\hat{O}B = 18°$. Detto B' il punto d'intersezione della perpendicolare da B all'asse x con la circonferenza, risulta $B\hat{O}B' = 36°$ ed essendo $36° = (1/10)360°$, la corda BB' è il lato del decagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio r che risulta essere la sezione aurea del raggio, quindi:

$$BB' = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \quad \rightarrow \quad HB = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo OHB, si ricava:

$$OH = \sqrt{1 - \frac{(\sqrt{5} - 1)^2}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

Quindi

$$\sin 18 = y_B = HB \quad \rightarrow \quad \boxed{\sin 18 = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}}$$

$$\cos 18 = x_B = OH \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\cos 18 = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

Si ha poi:

$$\tan 18 = \frac{\sin 18}{\cos 18} = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) : \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{10+2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}}$$

Razionalizzando, si ha:

$$\boxed{\tan 18 = \sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}}}$$

Inoltre $\cot 18 = 1/\tan 18 = \sqrt{(5+\sqrt{5})/(3-\sqrt{5})}$. Razionalizzando si ha:

$$\boxed{\cot 18 = \sqrt{5+2\sqrt{5}}}$$