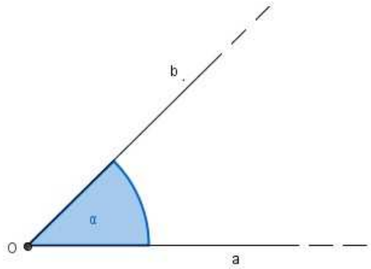
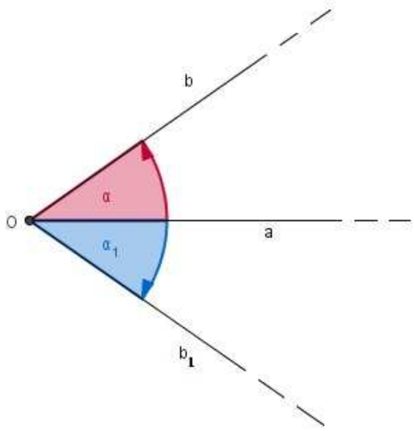
FUNZIONI GONIOMETRICHE

ANGOLI



Col termine **angolo** indichiamo la parte di piano limitata da due semirette aventi la stessa origine, chiamata *vertice*.

Possiamo definire anche l'angolo come la parte di piano generata dalla rotazione, intorno a O, di una delle due semirette, detta *primo lato dell'angolo*, fino a sovrapporsi all'altra semiretta, detta *secondo lato dell'angolo*.



Se la rotazione avviene in senso antiorario, l'angolo α è **positivo**, se avviene in senso orario, l'angolo è **negativo**.

Gli angoli possono essere misurati in gradi o radianti.
Se per unità di misura si prende il **grado** (che equivale alla 360ma parte della circonferenza, quindi dell'angolo giro), si ha la misura dell'angolo nel **sistema sessagesimale**. In questo sistema, il grado si divide in 60 primi e il primo in 60 secondi:

$$1° = 60' \qquad 1' = 60'' \qquad 1° = 3600''$$

Un altro modo di misurare gli archi è quello di assumere come unità di misura il **radiante**, che si definisce come *l'angolo al centro della circonferenza che insiste su un arco che, rettificato, è congruente al raggio della circonferenza*.
Per passare da un'unità di misura all'altra si usa la seguente proporzione:

$$\alpha° : 180° = \alpha^r : \pi$$

Dalla quale deriva:

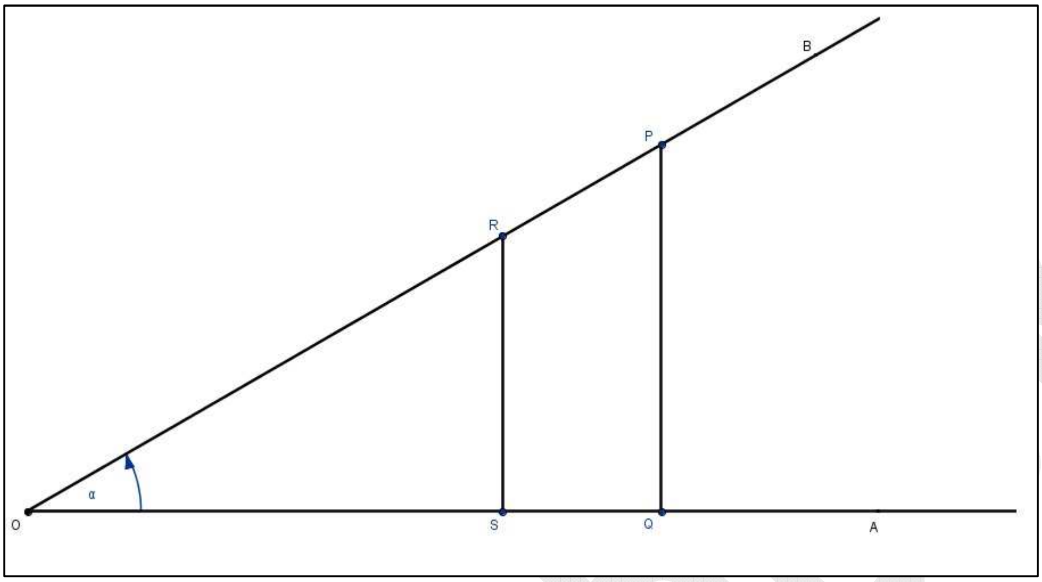
$$\alpha° = \frac{\alpha^r \cdot 180°}{\pi} \qquad \text{e} \qquad \alpha^r = \frac{\alpha° \cdot \pi}{180°}$$

Misura in gradi in radianti di alcuni angoli tra i più frequenti nelle applicazioni:

GRADI	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
RADIANTI	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

FUNZIONI GONIOMETRICHE

Sia dato l'angolo $A\hat{O}B = \alpha$ e siano rispettivamente OA e OB il primo e il secondo lato dell'angolo. Sia P un punto qualsiasi sul secondo lato di α. Sia Q la proiezione ortogonale di P sulla retta OA del primo lato dell'angolo: convenzionalmente il segmento QP, che esprime la distanza di P dal primo lato dell'angolo, si assumerà positivo per gli angoli convessi e negativo per gli angoli concavi.



Le funzioni goniometriche sono il *seno*, il *coseno*, la *tangente* e la *cotangente*. Prima di definire le funzioni goniometriche bisogna precisare che P indica un qualsiasi punto di OB che sia diverso da O, infatti se consideriamo su OB un altro punto R avente per proiezione ortogonale su OA il punto S, i triangoli ORS e OPQ sono simili avendo gli angoli congruenti e hanno quindi i lati omologhi in proporzione.

Il seno dell'angolo α è il rapporto tra la distanza di un punto P, del secondo lato dell'angolo, dalla retta del primo lato e la distanza dello stesso punto dal vertice O.

$$\sin\alpha = \frac{QP}{OP}$$

Il coseno dell'angolo α è il rapporto tra la proiezione, sulla retta del primo lato dell'angolo, di un segmento OP scelto sul secondo lato e il segmento OP stesso.

$$\cos\alpha = \frac{OQ}{OP}$$

La tangente dell'angolo α è il rapporto tra la distanza di un punto P, sul secondo lato dell'angolo, dalla retta del primo lato e la proiezione, sempre sulla retta del primo lato, del segmento OP scelto sul secondo.

$$\tan\alpha = \frac{QP}{OQ}$$

La cotangente risulta essere l'inverso della tangente.

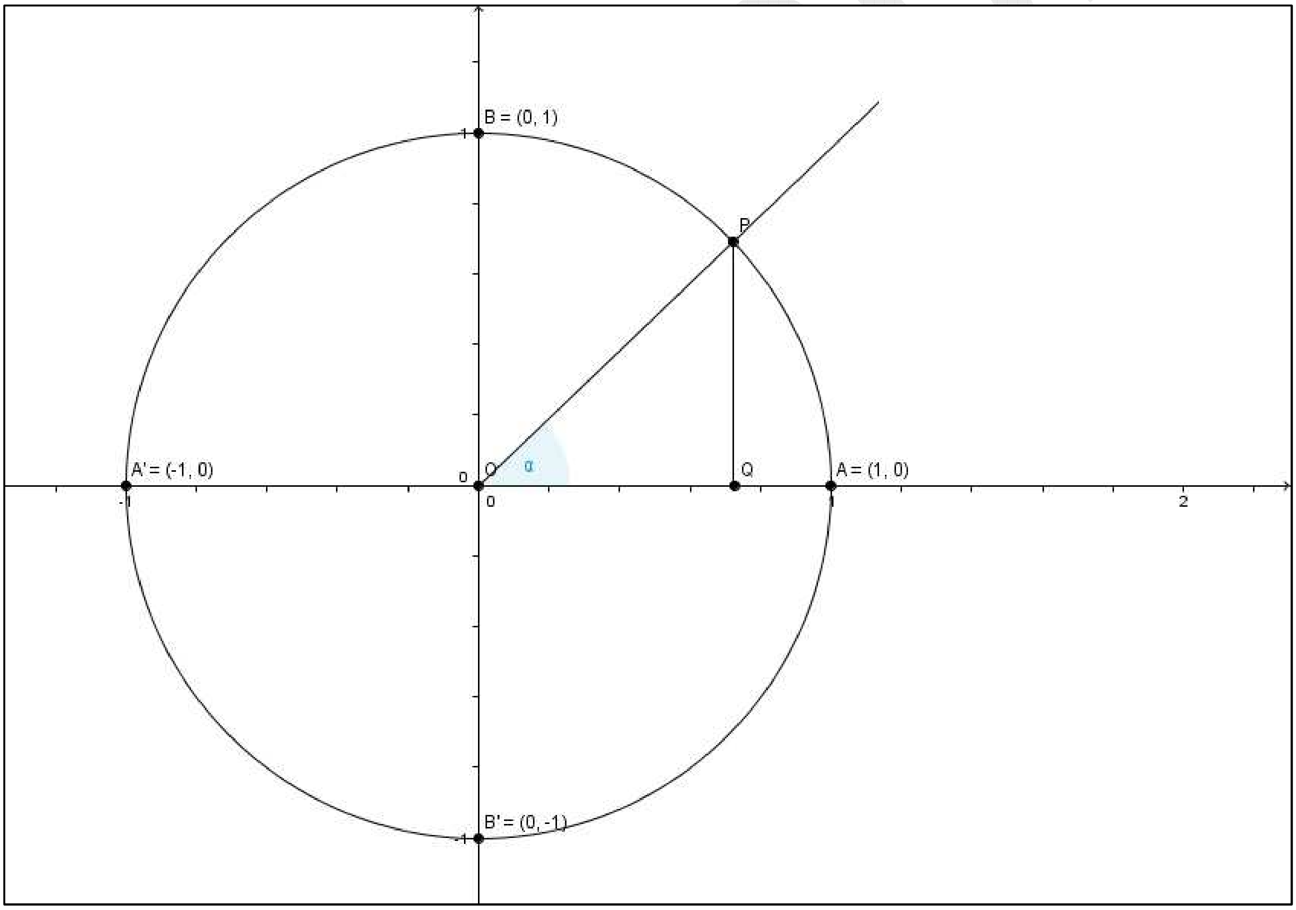
$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} \quad \rightarrow \quad \cot \alpha = \frac{OQ}{QP}$$

CIRCONFERENZA GONIOMETRICA

Consideriamo in un piano cartesiano xOy la circonferenza con il centro nell'origine e avente raggio uguale a 1. Tale circonferenza sarà chiamata circonferenza goniometrica. La sua equazione è:

$$x^2 + y^2 = 1$$

SENO DEFINITO NELLA CIRCONFERENZA GONIOMETRICA



Consideriamo una circonferenza goniometrica e prendiamo il punto P appartenente al secondo lato dell'angolo e alla circonferenza.

$$\sin \alpha = \frac{QP}{OP}$$

Essendo $OP = 1$, allora $\sin \alpha = QP$

Il *seno* dell'angolo α è l'ordinata del punto P di intersezione fra il secondo lato dell'angolo e la circonferenza goniometrica.

I QUADRANTE: $\sin 0 = 0$; $\sin 90 = 1$
Se $0° < \alpha < 90°$, allora $0 < \sin\alpha < 1$ → seno positivo

II QUADRANTE: $\sin 90 = 1$; $\sin 180 = 0$
Se $90° < \alpha < 180°$, allora $1 < \sin\alpha < 0$ → seno positivo

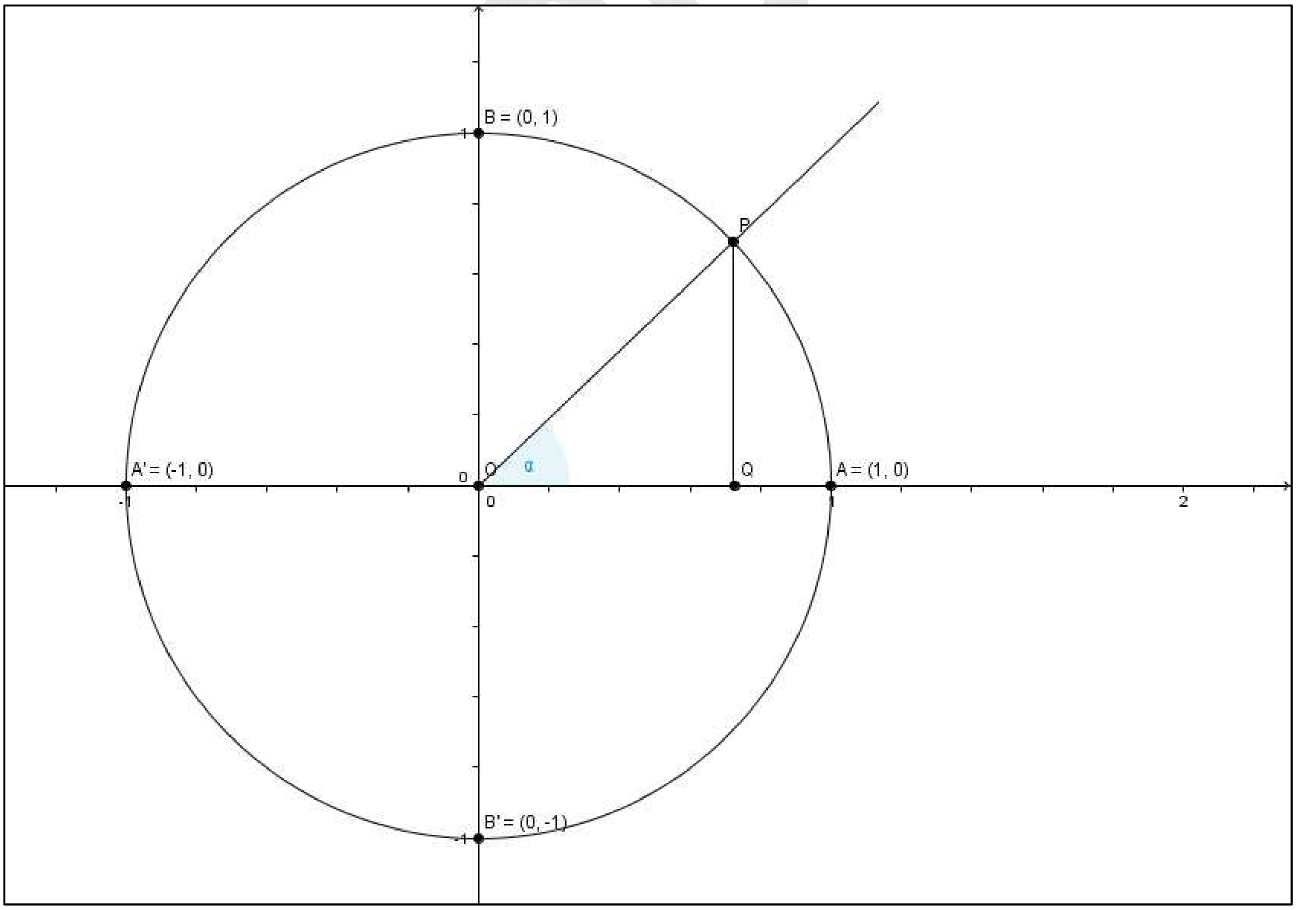
III QUADRANTE: $\sin 180 = 0$; $\sin 270 = -1$
Se $180° < \alpha < 270°$, allora $0 < \sin\alpha < -1$ → seno negativo

IV QUADRANTE: $\sin 270 = -1$; $\sin 360 = 0$
Se $270° < \alpha < 360°$, allora $-1 < \sin\alpha < 0$ → seno negativo

In conclusione possiamo affermare che il seno è sempre compreso tra -1 e 1:

$$\mathbf{-1 < \sin\boldsymbol{\alpha} < 1}$$

COSENO DEFINITO NELLA CIRCONFERENZA GONIOMETRICA



Consideriamo una circonferenza goniometrica e prendiamo il punto P appartenente al secondo lato dell'angolo e alla circonferenza.

$$\cos\alpha = \frac{OQ}{OP}$$

Essendo $OP = 1$, allora $\cos\alpha = OQ$

Il *coseno* dell'angolo α è l'ascissa del punto P di intersezione tra il secondo lato dell'angolo e la circonferenza goniometrica.

I QUADRANTE: $\cos 0 = 1;\quad \cos 90 = 0$
Se $0° < \alpha < 90°$, allora $1 < \cos\alpha < 0$ → coseno positivo

II QUADRANTE: $\cos 90 = 0;\quad \cos 180 = -1$
Se $90° < \alpha < 180°$, allora $0 < \cos\alpha < -1$ → coseno negativo

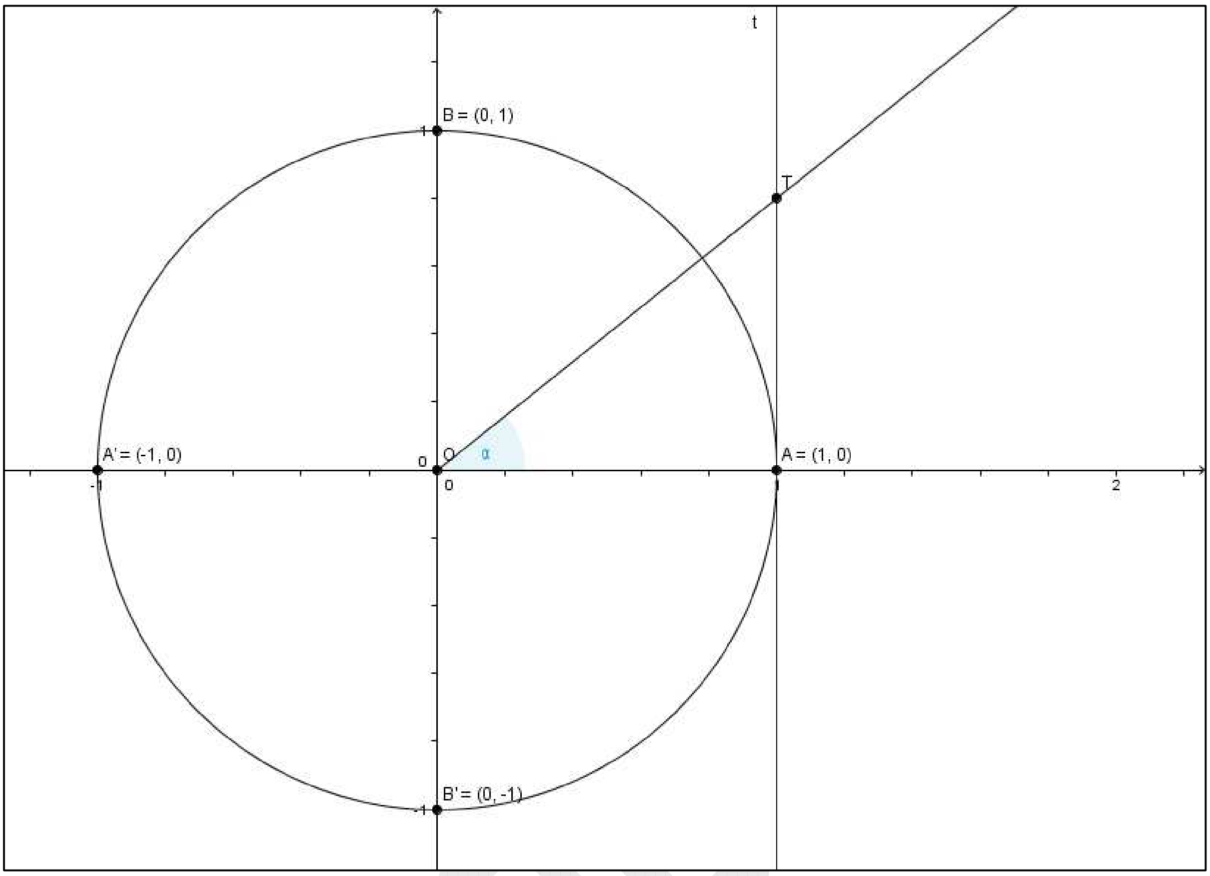
III QUADRANTE: $\cos 180 = -1;\quad \cos 270 = 0$
Se $180° < \alpha < 270°$, allora $-1 < \cos\alpha < 0$ → coseno negativo

IV QUADRANTE: $\cos 270 = 0;\quad \cos 360 = 1$
Se $270° < \alpha < 360°$, allora $0 < \cos\alpha < 1$ → coseno positivo

In conclusione possiamo affermare che il coseno è sempre compreso tra -1 e 1:

$$\boldsymbol{-1 < \cos\alpha} < 1$$

TANGENTE DEFINITA NELLA CIRCONFERENZA GONIOMETRICA



Consideriamo una circonferenza goniometrica e la tangente alla circonferenza nel punto A. Prendiamo il punto T di intersezione tra la tangente e il secondo lato dell'angolo.

$$\tan\alpha = \frac{AT}{OA}$$

Essendo $OA = 1$, allora $\tan\alpha = AT$

La *tangente* dell'angolo α è l'ordinata del punto T di intersezione tra il secondo lato dell'angolo e la tangente geometrica alla circonferenza nel punto A(1,0).

I QUADRANTE

Quando il punto T si trova sull'asse x (quindi $A \equiv T$) la tangente di $\alpha = 0°$ è $\tan 0 = 0$.
Quando $\alpha = 90°$ la tangente non esiste (in quanto T si trova sull'asse y che è parallelo alla tangente): si dice che *la tangente di 90° non è determinata*.
Se si considera una minuscola parte del grado, indicata con ε, si può affermare che la tangente di $90° - \varepsilon$ è uguale a infinito e si scrive:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \tan(90° - \varepsilon) = +\infty$$

II QUADRANTE
Anche nel secondo quadrante quando T si trova sull'asse x ($T \equiv A'$) la tangente di $\alpha = 180°$ è $\tan 180° = 0$. Però nel secondo quadrante avremo che la tangente di $90° + \varepsilon$ è uguale a meno infinito e si scrive:

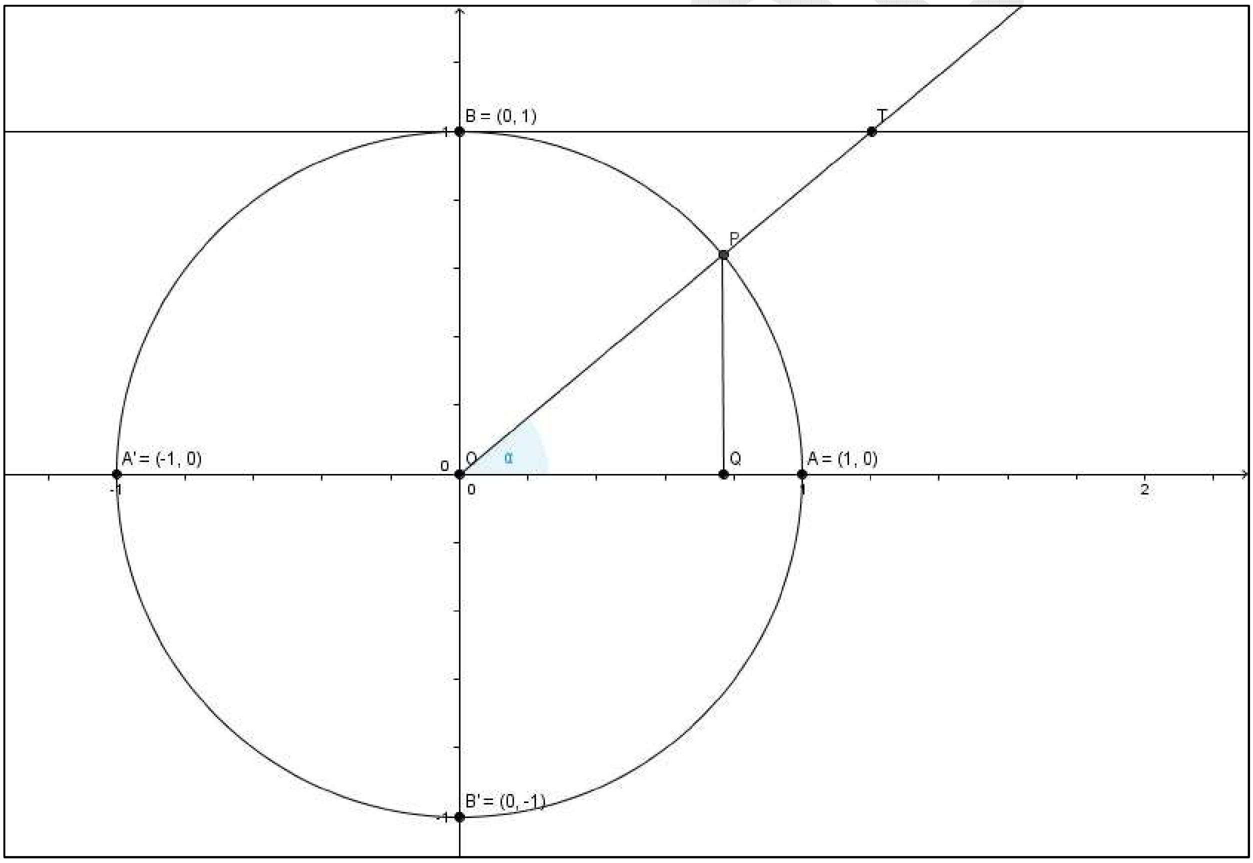
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \tan(90° + \varepsilon) = -\infty$$

In conclusione si può affermare che la tangente dell'angolo α è compresa tra più e meno infinito:

$$-\infty < \boldsymbol{\tan \alpha} < +\infty$$

N.B. La tangente è positiva nel I e III quadrante ed è negativa nel II e IV quadrante.

COTANGENTE DEFINITA NELLA CIRCONFERENZA GONIOMETRICA



Consideriamo una circonferenza goniometrica e la tangente alla circonferenza nel punto B. sappiamo che la cotangente è l'inverso della tangente:

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} \quad \rightarrow \quad \cot \alpha = \frac{OQ}{PQ}$$

Consideriamo i triangoli BOT e OPQ, essi sono simili per questo vale la seguente proporzione:

$$OQ : QP = BT : OB \qquad \rightarrow \qquad \frac{OQ}{QP} = \frac{BT}{OB}$$

Essendo $OB = 1$, allora

$$\frac{OQ}{OP} = BT$$

La *cotangente* dell'angolo α è l'ascissa del punto di intersezione tra il secondo lato dell'angolo e la tangente geometrica alla circonferenza nel punto B(0,1).

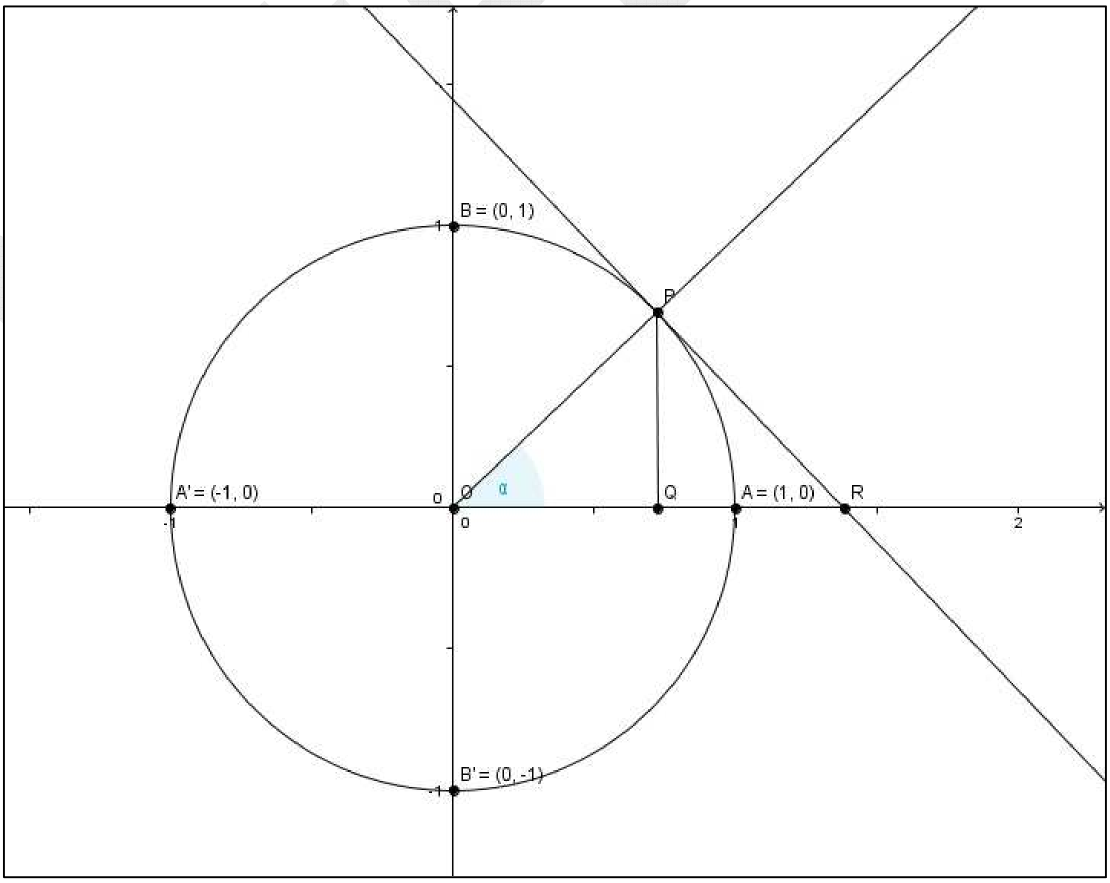
Quindi la cotangente di $\alpha = 0°$ e $\alpha = 180°$ non è determinata, mentre $\cot 90 = 0$ e $\cot 270 = 0$. Come già detto per la tangente, si può considerare una minuscola parte del grado, indicata con ε, e si può affermare:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \cot(\varepsilon) = +\infty$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \cot(180 - \varepsilon) = -\infty$$

N.B. La cotangente è positiva nel I e III quadrante ed è negativa nel II e IV quadrante.

SECANTE DI UN ANGOLO



Consideriamo una circonferenza goniometrica e la tangente alla circonferenza nel punto P.

La *secante* dell'angolo α è l'ascissa del punto R di intersezione tra l'asse delle x la tangente alla circonferenza nel punto P.

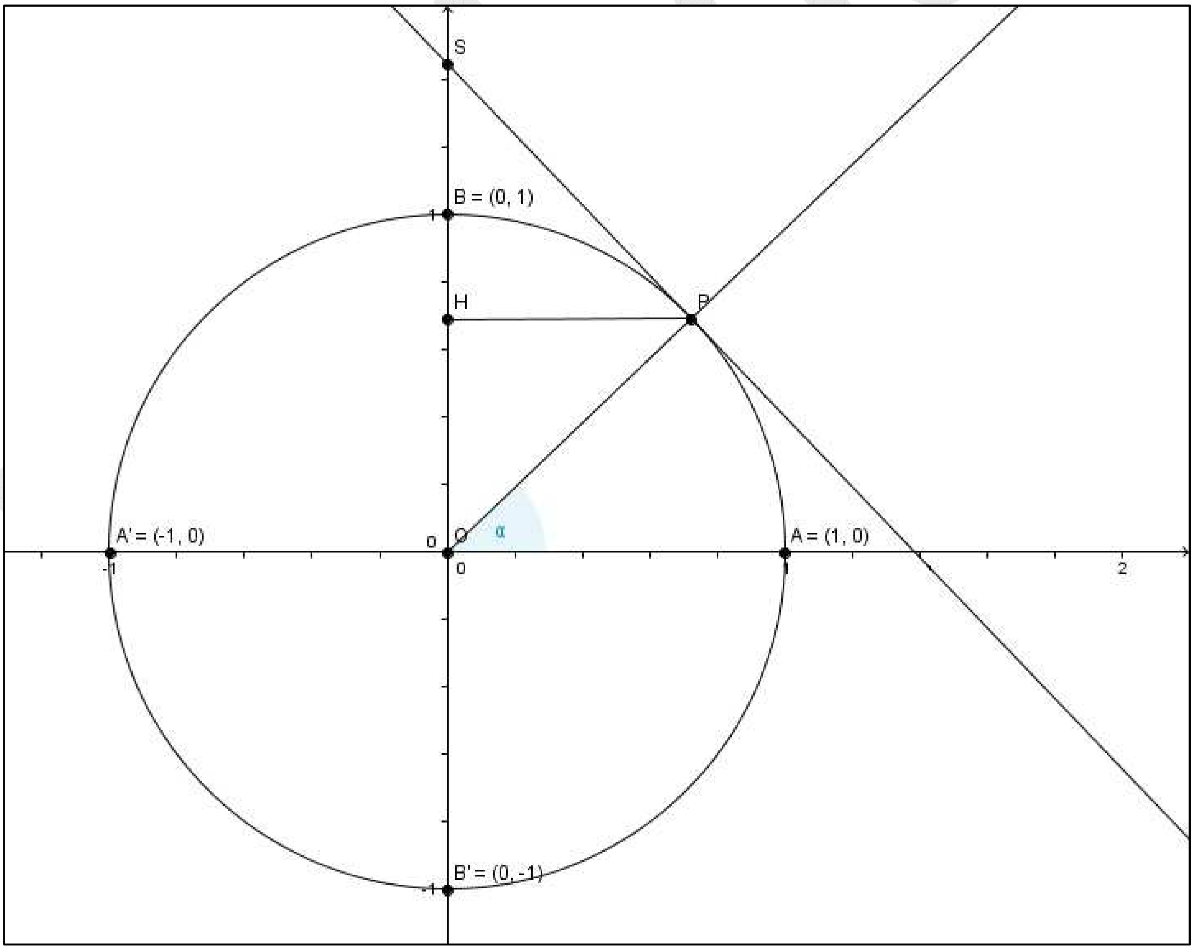
È dimostrato che la secante dell'angolo α è l'inverso del coseno di α:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \text{con } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Infatti se consideriamo in triangolo ORP e OQP notiamo che essi sono simili perché hanno gli angoli ordinatamente uguali, quindi:

$$OR : OP = Op : OQ \quad \rightarrow \quad \sec\alpha : 1 = 1 : \cos\alpha \quad \rightarrow \quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

COSECANTE DI UN ANGOLO



Consideriamo una circonferenza goniometrica e la tangente alla circonferenza nel punto P.

La *cosecante* dell'angolo α è l'ordinata del punto S di intersezione tra l'asse delle y e la tangente geometrica alla circonferenza nel punto P.

È dimostrato che la cosecante dell'angolo α è l'inverso del seno di α:

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \qquad \text{con } \alpha \neq k\pi$$

Infatti se consideriamo i triangoli OPS e HOP notiamo che essi sono simili quindi:

$$OS : OP = OP : OH \quad \rightarrow \quad \csc\alpha : 1 = 1 : \sin\alpha \quad \rightarrow \quad \csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$