FUNZIONI CONTINUE

Una funzione $f(x)$ si dice **continua** nel punto $x = c$ (con c punto di accumulazione) se risulta

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Dunque, affinché una funzione $y = f(x)$ sia continua nel punto $x = c$, devono verificarsi contemporaneamente le seguenti condizioni:

1. esistenza del valore della funzione per $x = c$

2. esistenza del limite finito l della funzione per $x \to c$, cioè

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = l$$

3. il limite l deve essere uguale a $f(c)$.

Sono funzioni continue:

- funzioni razionali intere (continue in R)
- funzioni razionali fratte (continue in X)
- funzioni irrazionali intere e fratte (continue in X)
- funzioni esponenziali (continue in R)
- funzioni logaritmiche (continue in X)
- funzione $f(x) = \sin x$ (continua in X)
- funzione $f(x) = \cos x$ (continua in R)
- funzione $f(x) = \tan x$ (continua in X)
- funzione $f(x) = \text{cotg}x$ (continua in X)
- funzioni inverse $arsen$, $arcos$, $arctg$, $arccotg$ (continue in X).

Quando anche una sola delle tre condizioni non è verificata, la funzione non è continua nel punto $x = c$; si dice che in tale punto la funzione è **discontinua** e che $x = c$ è un **punto di discontinuità** per la funzione (o punto singolare).
Ci sono tre specie di punti di discontinuità.

PRIMA SPECIE

Si dice che per $x = c$, la funzione $y = f(x)$ ha un punto di discontinuità di prima specie, quando esistono finiti, ma diversi tra loro, i limiti dalla destra e dalla sinistra per $x \to c$ della funzione.

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = l_1 \quad , \quad \lim_{x \to c^+} f(x) = l_2 \qquad \Rightarrow \quad l_1 \neq l_2$$

Se $x = c$ è un punto i discontinuità di prima specie per la funzione f(x), si chiama **salto** della funzione in $x = c$ il valore assoluto della differenza tra il limite destro e il limite sinistro:

$$salto \ = \left| \lim_{x \to c^+} f(x) - \lim_{x \to c^-} f(x) \right|$$

SECONDA SPECIE

Si dice che per $x = c$ la funzione $y = f(x)$ ha un punto di discontinuità di seconda specie quando almeno uno dei due limiti (o il destro o il sinistro o entrambi) è infinito.

TERZA SPECIE O DISCONTINUITÀ ELIMINABILE

Si dice che per $x = c$ la funzione $y = f(x)$ ha un punto di discontinuità di terza specie quando:

$$\exists \lim_{x \to c} f(x) = l \quad \text{ma} \quad \nexists f(c)$$

$$\exists \lim_{x \to c} f(x) = l \quad \text{e} \quad \exists f(c) \quad \text{ma} \quad \lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$$