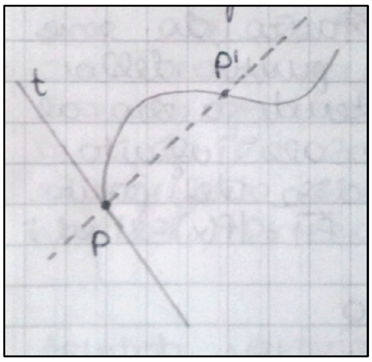
DERIVATA DI UNA FUNZIONE

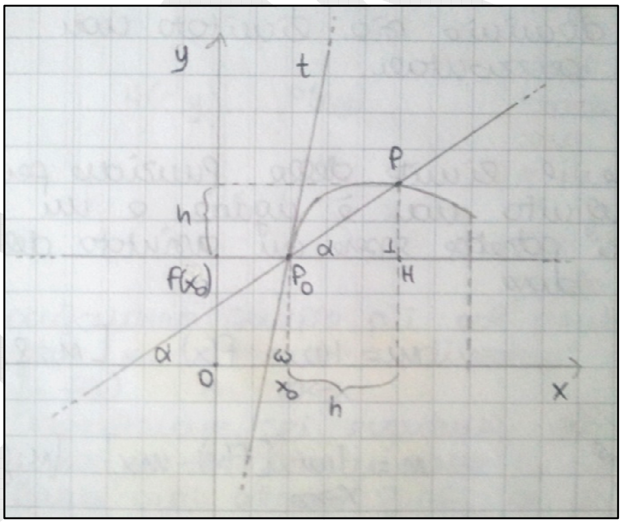
RETTA TANGENTE AD UNA CURVA



Si consideri una curva qualsiasi. Sia t la retta tangente nel punto P. Prendiamo un punto P' sulla curva e consideriamo la retta PP': la retta tangente rappresenta la posizione limite della retta secante PP' quando P', muovendosi lungo la curva, tende a sovrapporsi a P.

$$t = \lim_{P' \to P} PP'$$

Consideriamo un sistema di assi cartesiani.
Consideriamo una curva di equazione $y = f(x)$ di dominio $X = [a, b]$
Consideriamo un punto $P_0(x_0, f(x_0))$. La retta tangente t passante per P_0 forma con l'asse delle x un angolo ω ed ha equazione



$$y - f(x_0) = m(x - x_0)$$

Dove $m = tg\omega$.
Consideriamo un punto P$(x_0 + h, f(x_0) + h)$.
Tracciamo la retta parallela all'asse delle x passante per P_0 che forma un triangolo rettangolo con la retta PP_0

La $tg\omega$ è la posizione limite della $tg\alpha$ quando P tende a sovrapporsi a P_0:

$$\operatorname{tg}\omega = \lim_{P \to P_0} \operatorname{tg}\alpha$$

Considerando il triangolo P_0HP scriviamo

$$\tan\alpha = \frac{HP}{P_0H}$$

Dove $HP = f(x_0 + h) - f(x_0)$ e $P_0H = x_0 + h - x_0 = h$.
Quindi:

$$m = \tan\omega = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_0)}{h}$$

$$\frac{f(x_o + h) - f(x_0)}{h} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{rapporto\ incrementale}$$

$f(x_o + h) - f(x_0) = incremento\ della\ variabile\ dipendente$
$h \ = \ incremento\ della\ variabile\ indipendente$

Quando esiste il limite del rapporto incrementale ed è un numero finito esiste il coefficiente angolare m e quindi esiste la retta tangente nel punto P_0.

DERIVATA DI UNA FUNZIONE

Sia la funzione $y = f(x)$ definita in $[a, b]$ e sia x_0 un punto appartenente a $]a, b[$, si dice **derivata della funzione nel punto di ascissa x_0 il limite** (se esiste ed è un numero finito) **del rapporto incrementale al tendere a zero dell'incremento della variabile indipendente**.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_0)}{h}$$

Quando la derivata destra e quella sinistra coincidono, la derivata si dice **ordinaria** e la funzione è derivabile:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_o + h) - f(x_0)}{h} \quad \rightarrow \quad derivata\ sinistra$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_o + h) - f(x_0)}{h} \quad \rightarrow \quad derivata\ destra$$

Se $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$ $\Rightarrow$ una tangente: funzione derivabile

Se $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$ $\Rightarrow$ due tangenti: funzione non derivabile