CONSEGUENZA DEL TEOREMA DI LAGRANGE

Sia $y = f(x)$ una funzione continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$ e derivabile nell'intervallo aperto $]a, b[$, se la derivata della funzione è positiva, allora la funzione è crescente, se la derivata è negativa, allora la funzione è decrescente.

Hp
$f(x)$ continua in $[a, b]$
$f(x)$ derivabile in $]a, b[$
$f'(x) \gtrless 0 \; \forall x \; \in \,]a, b[$

Th
$f(x)$ crescente/decrescente in $[a, b]$

Dimostrazione
Considero l'intervallo $[x_1, x_2]$ interno all'intervallo $[a, b]$ con $x_2 > x_2$.
La funzione sarà continua in $[x_1, x_2]$ e derivabile in $]x_1, x_2[$.
Applichiamo il teorema di Lagrange:

$$\exists c \; \in \;]x_1, x_2[\, : \; f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Per ipotesi $f'(x) \gtrless 0$ quindi $f'(c) \gtrless 0$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \gtrless 0; \quad f(x_2) - f(x_1) \gtrless 0; \quad f(x_2) \gtrless f(x_1)$$