COMBINAZIONI

Si dicono **combinazioni** di classe k di n elementi (con $k \leq n$) i gruppi costituiti da k elementi che differiscono per almeno un elemento.

Il numero di questi gruppo è dato dal rapporto tra le disposizioni e le permutazioni di classe k.

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k}$$

$$C_{n,k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(k-1)]}{k!}$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per $(n-k)!$ si ottiene

$$C_{n,k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(k-1)](n-k)!}{k!\,(n-k)!}$$

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

I numeri $C_{n,k}$ si chiamano **coefficienti binomiali** e si indicano col simbolo $\binom{n}{k}$ che si legge «n su k».

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = \frac{n!}{n!\,0!} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n!\,(n-1)!}{1(n-1)!} = n$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!\,(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

PRIMA PROPRIETÀ. Il numero delle combinazioni di n elementi di classe k è uguale al numero delle combinazioni degli stessi elementi di classe $n-k$, ossia $C_{n,k} = C_{n,\ n-k}$.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Infatti:

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=\frac{n!}{(n-k)!\,(n-n+k)!} \quad \rightarrow \quad \frac{n!}{k!\,(n-k)!}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

SECONDA PROPRIETÀ. Il numero delle combinazioni di n elementi di classe k è uguale alla somma delle combinazioni di classe k e di quelle di classe $k-1$ formate con $n-1$ elementi, ossia $C_{n,k}=C_{n-1,\ k}+C_{n-1,\ k-1}$.

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$$

Infatti, il secondo membro di tale uguaglianza si può così riscrivere:

$$\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\frac{(n-1)!}{k!\,[(n-1)-k]!}+\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,[(n-1)-(k-1)]!}$$

$$=\frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!}+\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}$$

Trasformiamo quest'ultima espressione tenendo presente che $k!=k(k-1)!$ e $(n-k)!=(n-k)(n-k-1)!$ e successivamente, raccogliendo a fattor comune e svolgendo i calcoli, si ottiene:

$$\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\frac{(n-1)!}{k(k-1)!\,(n-k-1)!}+\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)(n-k-1)!}=$$

$$=\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k}\right)=$$

$$=\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!}\cdot\frac{n}{k(n-k)}=$$

$$=\frac{n(n-1)!}{k(k-1)!\,(n-k)(n-k-1)!}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=\binom{n}{k}$$