POTENZE

POTENZE CON ESPONENTE APPARTENENTE A N

In matematica la **potenza** è un'operazione che associa ad una coppia di numeri a e n (detti rispettivamente base ed esponente) il numero dato dal prodotto di n fattori uguale ad a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots a}_{n\ volte}$$

In questo contesto a è un numero reale, mentre n è un numero positivo, cioè appartenete ad N (numeri naturali).

PROPRIETÀ

Sia $a \in R^+, m \in N, n \in N_0$; si ha che la potenza di:

- Un numero a elevato a 0 è sempre uguale a 1.

$$a^0 = 1$$

- Un numero a con esponente negativo è uguale al suo reciproco.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

- Un numero a con esponente frazionario è uguale ad una radice che ha come argomento a^m e come indice n.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

- Un numero a con esponente frazionario negativo è uguale a:

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

- Il prodotto di due o più potenze aventi la stessa base è una potenza che ha per base la stessa base e come esponente la somma degli esponenti.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

- Il quoziente di potenze che hanno la stessa base è una potenza che ha per base la stessa base e come esponente la differenza tra l'esponente del dividendo e l'esponente del divisore.

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

- La potenza di una potenza è una potenza in cui la base rimane la stessa e l'esponente è dato dal prodotto degli esponenti.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

- Il prodotto di due potenze con lo stesso esponente è una potenza che ha per esponente lo stesso esponente e per base il prodotto della basi.

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

- Il quoziente di potenze con lo stesso esponente è una potenza che ha per esponente lo stesso esponente e per basi il quoziente delle basi.

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

POTENZE CON ESPONENTE APPARTENENTE AD $\boldsymbol{R}$

Se l'esponete appartiene all'insieme R dei numeri reali, la base a deve essere maggiore di 0 e diversa da 1:

$$a^x \quad con \;\; x \in R \quad \Rightarrow \quad a > 0 \;\; \wedge \;\; a \neq 1$$

FUNZIONE ESPONENZIALE

Se a è un numero reale positivo, per qualunque valore di x è definita la funzione $f: x \to a^x$.
Tale funzione è detta **funzione esponenziale** di base a. Il suo dominio è l'insieme R dei numeri reali e il suo codominio è l'insieme R^+; la sua equazione è

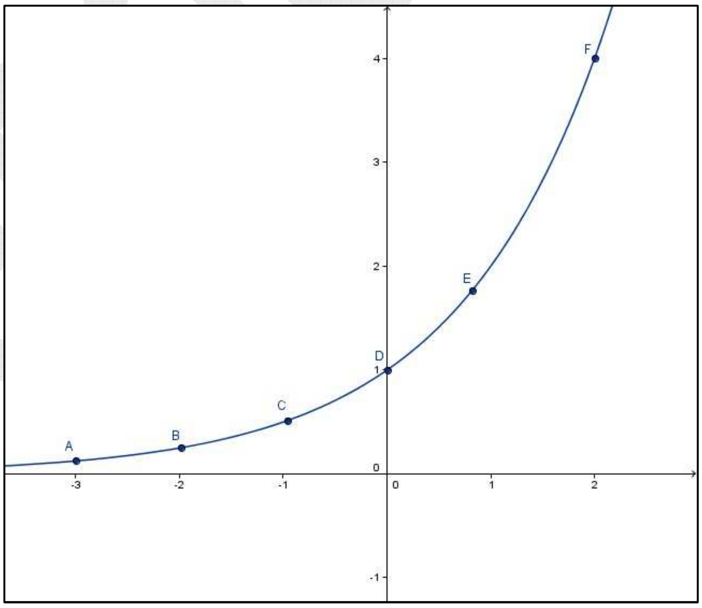
$$y = a^x$$

PROPRIETÀ DELLA FUNZIONE ESPONENZIALE

Si distinguono due casi: $a > 1$ e $0 < a < 1$.
Il caso $a = 1$ non presenta alcun interesse, perché, essendo $1^x = 1$, la funzione esponenziale di base 1 coincide con la funzione costante di equazione $y = 1$.

PRIMO CASO: $\boldsymbol{a} > 1$

Consideriamo la funzione $f: x \to 2^x$ di equazione $y = 2^x$ e rappresentiamola nel piano cartesiano.



Osservazioni:

- La funzione esponenziale interseca sempre l'asse delle y nel punto (0, 1).

- Se la base a della potenza a^x è, come nel nostro caso, maggiore di 1, la potenza cresce al crescere dell'esponente. I valori di y sono tutti positivi e, per $x > 0$, tendono a diventare grandi quanto si vuole, tendono cioè all'infinito al crescere indefinitamente dell'esponente positivo. Ciò si esprime scrivendo:

$$\lim_{x \to +\infty} 2^x = +\infty$$

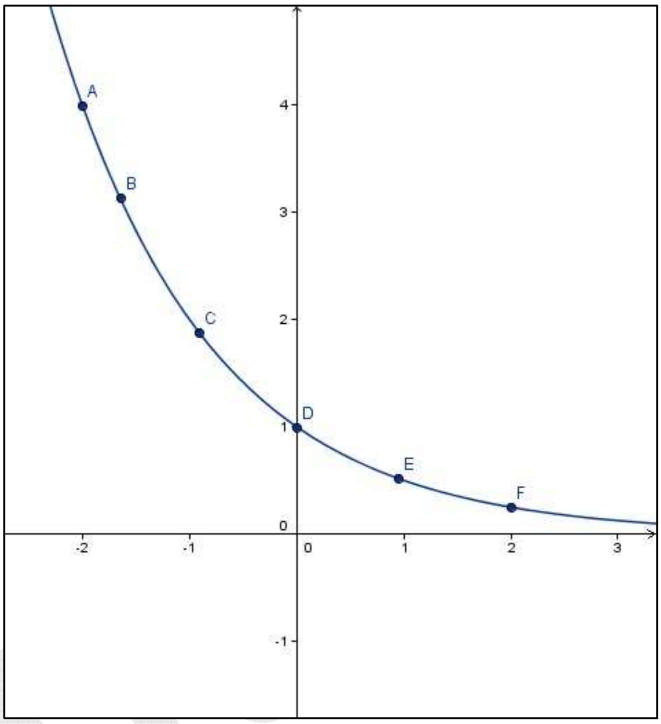
- Sostituendo a x valori negativi, crescenti in valore assoluto, y assume ancora valori positivi, ma tende a diventare sempre più piccola. Ne segue che il diagramma, alla sinistra dell'asse y, sta ancora sopra all'asse x, ma si avvicina *asintoticamente* a esso a mano a mano che ci si allontana dall'origine. Ciò si esprime scrivendo:

$$\lim_{x \to -\infty} 2^x = 0$$

SECONDO CASO: $0 < x < 1$

Consideriamo ora la funzione $f: x \to (1/2)^x$ di equazione $y = (1/2)^x$ e rappresentiamola graficamente nel piano cartesiano.

Osservazioni:



- Anche in questo caso la funzione esponenziale interseca l'asse delle y nel punto (0, 1).

- L'ordinata dei punti della curva decresce in definitivamente quando x cresce per valori positivi:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$$

- L'ordinata dei punti della curva cresce in definitivamente quando x è negativo e cresce in valore assoluto:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty$$